

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт геофизики имени Ю.П. Булашевича
Уральского отделения Российской академии наук

На правах рукописи



БЫЗОВ ДЕНИС ДМИТРИЕВИЧ

МЕТОДЫ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ДАННЫХ ГРАВИМЕТРИИ С
ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СЕТОЧНЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ
РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Специальность 25.00.10 –
«Геофизика, геофизические методы поисков полезных ископаемых»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН,
Мартышко Петр Сергеевич

Екатеринбург 2020

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	4
1 ПРЯМАЯ ЗАДАЧА ГРАВИМЕТРИИ ДЛЯ СЕТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ (ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ПОЛЯ ПО ЗАДАННОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ПЛОТНОСТИ)	18
1.1 Быстрый алгоритм.....	18
1.2 Примеры счета.....	22
1.3 Выводы по главе.....	24
2 ВЫБОР ПЛОТНОСТИ ОТНОСИМОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИМЕТРИИ.....	26
2.1 Задача геологического редуцирования. Нормальная плотность региональной модели.....	27
2.2 Тестовый пример.....	29
2.3 Послойное редуцирование градиентной модели литосферы Тимано-Печорской плиты.....	33
2.4 Выводы по главе.....	40
3 ЛИНЕЙНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ГРАВИМЕТРИИ ДЛЯ МОДЕЛИ СЛОИСТЫХ СРЕД (ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ПО ИЗВЕСТНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ ПОЛЯ).....	42
3.1 Итерационный процесс в общем виде	43
3.2 Дискретизация итерационного процесса.....	45
3.3 Тестирование алгоритма решения линейной обратной задачи на синтетических и практических примерах.....	50
3.4 Выводы по главе.....	60

4	РАЗДЕЛЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ПРИ ПОМОЩИ АППАРАТА АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ	61
4.1	Описание операции $up(\cdot)$ пересчета вверх	63
4.2	Описание операции $down(\cdot, \cdot)$ пересчета вниз	67
4.3	Применение пересчетов к построению плотностной модели	70
5	КРУПНОМАСШТАБНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИПОВЕРХНОСТНЫХ ОБЪЕКТОВ.....	76
5.1	Исключение влияния региональных источников поля (разделение наблюдаемого поля на региональную и локальную составляющие).....	77
5.2	Аппроксимация гравитационных аномалий полями материальных отрезков	79
5.3	Малоглубинные плотностные модели локальных неоднородностей.....	84
5.4	Выводы по главе.....	92
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	94
	ЛИТЕРАТУРА	96

Введение

В настоящее время основой изучения структурных особенностей глубинного строения верхних слоев литосферы являются сейсмические данные, работы по их получению проводятся на всех материках и океанах, включая Арктику и Антарктику. Основным результатом являются скоростные разрезы, показывающие распределение скоростей продольных и поперечных волн с глубиной и структура преломляющих и отражающих границ. По этим разрезам выделяются слои, сложенные породами разного состава и степени метаморфизма. Методами сейсморазведки для исследования распределения крупномасштабных неоднородностей земной коры и верхней мантии являются глубинное сейсмическое зондирование, метод преломленных волн и метод приемных функций, также для этих целей применяют магнитотеллурическое зондирование [110, 82, 83, 98]. Однако полученные модели не всегда обладают достаточной детальностью и пространственным разрешением во всем диапазоне исследуемых глубин. Кроме того, по сейсмическим данным можно получить только скоростной разрез, который не дает информации о плотности геологических структур. Эту информацию можно получить с привлечением методов интерпретации гравитационного поля. Однако, такая интерпретация с использованием только данных наблюдаемого поля приводит к физически содержательным результатам при отыскании решения в сильно ограниченных (с точки зрения практического применения) классах модельных представлений. Такая ситуация возникает в силу того, что в общей математической постановке решение обратной задачи гравиметрии не единственно и неустойчиво зависит от входных данных. Поэтому при интерпретации гравитационного поля особое значение имеют выбор класса параметризации моделей и использование априорной информации.

Большинство исследователей поступают следующим образом: на основе интерпретации сейсмических данных строится скоростной разрез вдоль геотраверса, далее по эмпирическим формулам скорости пересчитываются в плотности. Как правило, гравитационное поле построенной таким образом 2D плотностной модели заметно отличается от наблюдаемого. Чтобы минимизировать

указанное расхождение, интерпретаторы обычно ограничиваются уточнением параметров этой начальной плотностной модели на основе «ручной» интерактивной методики многократного решения прямой задачи гравиметрии. Методика интерпретации, предлагаемая в настоящей работе, опирается на автоматизированное решение линейной обратной задачи гравиметрии, при котором влияние человека сведено к минимуму.

Построением плотностных моделей глубинного строения литосферы на основе комплексирования данных сейсмометрии и гравиметрии занимались, например, Т. В. Романюк [100, 54, 55, 62], С. А. Тихоцкий [104, 105], И. Л. Гришина, М. К. Кабан [90, 91, 92, 93], Н. В. Шаров [44, 45, 49, 74, 50] и др. Эти исследования выполнялись для регионов с различной геологической спецификой и показали высокую эффективность методов решения обратной задачи гравиметрии. Также задачи трехмерного плотностного моделирования геологической среды для крупных литосферных единиц успешно решались в работах украинской школы геофизиков: В. И. Старостенко [22, 23, 44, 45, 46, 60], А. С. Костюкевич, Т. П. Егоровой [18, 19, 95, 96, 111-121] и др., грузинской школы – М. А. Алексидзе [1, 2] и его коллег. Аналогичные исследования проводятся зарубежными учеными: U. Achauer [75, 104, 105, 106], J. Ebbing [88, 101, 102, 103], C. Spooner [103], E. Kadima [94]. Последним выполнено построение модели области бассейна р. Конго с примерными размерами 1000x1200 км, что сопоставимо с моделями, построенными по методике, описанной в настоящей работе, научным коллективом (с Автором в составе) ИГФ УрО РАН под руководством П. С. Мартышко [38]. Однако, в наших исследованиях взят значительно меньший шаг между точками наблюдения гравитационного поля и характерными размерами элементов модели (1 км против 5 км).

В мировой науке есть публикации на тему автоматизированного решения обратных задач гравиметрии. К примеру, можно назвать R. Touthmalani и H. Saibi [107, 108], однако их исследование выполнено для 8000 элементов разбиения исследуемого объема и 776 точек наблюдения, что не позволяет говорить о возможной практической применимости метода к построению детальных

региональных моделей. Примером построения трехмерной региональной плотностной и скоростной модели является модель глубинного строения байкальской рифтовой зоны на основе совместной инверсии гравитационных и сейсмических данных, построенная С. А. Тихоцким и В. О. Михайловым [104] совместно с французскими коллегами. Модель состоит из шести глубинных слоев и охватывает глубины до 200 км. Муравиной О. М., Глазным В. Н. [10, 39, 40] выполнено трехмерное плотностное моделирование коры воронежского кристаллического массива на основе комплекса геологических, сейсмических, петрофизических и геотермических данных. Методами стохастического моделирования построена термическая модель. Начальное приближение плотностной модели получено на основании перехода от скоростных моделей литосферы к плотностным с учетом температуры и давления в среде. В качестве исходных данных гравитационного поля была использована модель EGM2008 на сетке 5 угловых минут.

Важным этапом в описываемом в работе методе решения обратной задачи является разделение вертикальной компоненты гравитационного поля на составляющие, которые принимаются за гравитационный эффект от горизонтальных слоев, расположенных на последовательных отметках глубин. Фильтрацией и разделением аномальных полей занимались в свое время М. Е. Артемьев [3], В. М. Гордин [11, 12, 13], В. О. Михайлов [3, 12, 13], В. Н. Страхов [67, 63, 64], С. А. Тихоцкий [70], П. С. Мартышко и И. Л. Пруткин [28] и др.

На сегодняшний день применяемые на практике технологии обработки геофизических полей вторичны по отношению к методам прямого геологического поиска, включая разведочное бурение, которым отдается приоритет в прогнозировании. Геофизические методы по большей части лишь подтверждают наличие уже выявленного геологического аномалиеобразующего фактора. Однако практическая целесообразность требует перехода на новый качественный уровень глубинных геолого-геофизических исследований, опирающихся на методы прогнозного математического моделирования. Это позволит в рамках уже

созданной технологической инфраструктуры исследований на перспективных площадях проводить полномасштабную количественную оценку запасов полезных ископаемых. Большую теоретическую работу в этом направлении вел В. Н. Страхов [65, 66, 68].

Разработка эффективных параллельных алгоритмов решения геофизических задач и реализующего их специализированного ПО для быстрого счета на сетках большой размерности с использованием возможностей современных вычислительных кластеров является перспективным направлением развития геофизики. В этом плане можно отметить работы следующих ученых. Е. Н. Акимов [77-80] занимается реализацией градиентных методов для решения задач о восстановлении рельефа криволинейных границ раздела слоев с постоянной плотностью или намагниченностью. М. Cuma, G. A. Wilson и М. С. Жданов [84] используют распараллеливание на кластере из 288 6-ядерных процессоров при помощи технологий MPI и OpenMP для построения плотностных и магнитных моделей на больших сетках. В следующей своей работе [85] эти авторы применяют для распараллеливания OpenACC и считают уже на GPU. Подход, которым воспользовался Автор для ускорения расчетов в программной реализации описанных в настоящей работе алгоритмов, близок к этому, однако, используется распараллеливание с применением технологии NVidia CUDA на GPU. В целом же, более популярным способом ускорения вычислений является использование встроенных средств программных пакетов, таких как Matlab и Maple [81, 109].

С распространением общедоступных персональных компьютеров началась разработка и внедрение в процесс комплексного анализа геофизических данных программных комплексов автоматизированной интерпретации: «GMT-Auto» (Старостенко В. И. [58, 59]), «ГИС ИНТЕГРО-Геофизика» (Галуев В. И. [9, 41]), КОСКАД-3D (Петров А. В., Никитин А. А. [21, 47]), СИГМА-3D (Блох Ю. И. [4, 5]) и др.

Актуальность работы

Изучение строения земной коры геофизическими методами и построение трёхмерных геолого-геофизических моделей на основе новых методов интерпретации геофизических данных (сейсмических, гравитационных, магнитных, каротажа и др.) является актуальной задачей. Разработка новых методов и компьютерных технологий построения моделей глубинного строения земной коры и верхней мантии по измерениям геофизических полей является одним из самых перспективных направлений современных исследований в науках о Земле. При этом предлагаемый в работе метод количественной интерпретации гравитационного поля на основе параллельных алгоритмов решения трехмерных линейных обратных задач гравиметрии и аналитического продолжения гармонических функций может стать частью более общего метода комплексной интерпретации сейсмических и гравитационных данных. Методы комплексной интерпретации имеют широкую научную значимость и могут применяться в любом регионе Земли.

Одним из основных индикаторов корректной реализации методики комплексирования геофизических полей служит плотность. Именно в ней наиболее полно отражаются петрофизические особенности неоднородного строения и литологического состава горных пород. Известно, что в гравитационном поле наиболее четко проявляются аномалии от неоднородностей верхней части геологического разреза до глубины 10–15 км. Рельеф границ глубинных слоев явно не выделяется в суммарном поле расчетных гравитационных аномалий. Однако, данные сейсмических зондирований убедительно свидетельствуют о неоднородном распределении скорости не только в земной коре, но и в подстилающих её верхах мантии. И вполне вероятным плотностным аналогом скоростной модели глубинных структур будет компенсационная модель, когда аномалии гравитационного поля от неоднородных слоёв на разных глубинах будут частично (или полностью) скомпенсированы. Изменение плотности по всей глубине неоднородного разреза земной коры позволяет оценить предполагаемую область компенсации глубинных масс и по разделенным составляющим гравитационного поля уточнить детали распределения плотности в низах коры и в

верхней мантии. Количественная интерпретация потенциальных геофизических полей и построение на ее основе моделей распределения физических параметров позволяют получить новые знания о строении земной коры и существенно расширяют возможности научного прогнозирования, разведки и поисков месторождений полезных ископаемых.

Цель работы

Разработать метод количественной интерпретации гравитационного поля на основе вычислительно эффективных параллельных алгоритмов решения трехмерных задач на сетках большой размерности: прямой задачи гравиметрии, линейной обратной задачи гравиметрии и задачи аналитического продолжения гармонических функций.

Задачи исследования

- Разработать вычислительно эффективный алгоритм решения прямой задачи гравиметрии для модели с кусочно-постоянным распределением плотности на равномерной сетке. Протестировать его однопоточную программную реализацию на моделях с разным числом элементов разбиения и сравнить время счета с однопоточным вычислением по «явной» формуле. Протестировать многопоточную программную реализацию быстрого алгоритма для GPU с поддержкой CUDA.
- Предложить способ выбора плотности относимости («плотности вмещающей среды») для расчета гравитационного поля от трехмерной модели среды с переменной плотностью, при котором редуцированные аномалии поля от фрагментов модели в произвольных криволинейных границах имели бы в общем случае меньшую амплитуду, чем при выборе произвольной константной плотности относимости. Продемонстрировать вид редуцированных аномалий поля от слоев с криволинейными границами для синтетических и практических моделей при различных вариантах выбора плотности относимости.
- Разработать алгоритм решения линейной обратной задачи гравиметрии, основанный на идее локализации: поле в каждой точке обусловлено главным образом областью плотностной модели, расположенной ближе всего к этой точке.

Соответственно, на каждой итерации метода имеет смысл модифицировать плотности в модели «локально», то есть зависимо только от ближайших точек задания поля. Протестировать программную реализацию алгоритма на модельных и практических примерах.

- Разработать вычислительно эффективный алгоритм расчета интеграла Пуассона для представления гармонических функций во «внешнем» полупространстве по их граничным значениям на плоскости. Также разработать алгоритм аналитического продолжения гармонических функций с плоскости во «внутреннее» полупространство на основе решения интегрального уравнения Фредгольма 1-ого рода модифицированным методом локальных поправок с регуляризацией. Применить оба алгоритма для метода разделения гравитационного поля по глубине. Продемонстрировать на практическом примере, как меняются результаты решения линейной обратной задачи с использованием указанного метода и без него.
- Собрать воедино аппарат решения линейной обратной задачи гравиметрии и пересчетов поля и в рамках единой методики применить к построению крупномасштабных моделей приповерхностных объектов.

Положения, выносимые на защиту

- 1) Предложенный в работе быстрый алгоритм для точного вычисления гравитационного поля от модели с кусочно-постоянным распределением плотности на равномерной сетке имеет меньшую вычислительную сложность, чем расчет по «явной» формуле, а созданное на его основе программное обеспечение использует на порядок меньше ресурсов процессора и памяти. Алгоритм можно использовать как важную составную часть методов автоматизированной интерпретации.
- 2) Предложенный в работе метод решения линейной обратной задачи гравиметрии, основанный на идее локализации, в совокупности с быстрым алгоритмом решения прямой задачи позволяет находить устойчивые решения в выбранном классе моделей. Параллельная программная реализация метода для GPU позволяет решать

обратную задачу для моделей с количеством элементов разбиения порядка $1e6$ практически в реальном времени.

- 3) Численный алгоритм пересчета гармонических функций в нижнее полупространство, основанный на решении интегрального уравнения Фредгольма 1-ого рода модифицированным методом локальных поправок с регуляризацией, позволяет устойчиво разделять гравитационное поле по глубине на составляющие, относимые к горизонтальным слоям модели на соответствующих глубинах.

Методология и методы исследования

В работе используется математический аппарат численных методов интегрирования и оптимизации, теории некорректных задач и аналитического продолжения гармонических функций. При разработке программного обеспечения, реализующего предлагаемые алгоритмы, использованы технологии высокопроизводительных вычислений на графических ускорителях Nvidia CUDA, AMD ROCm.

Научная новизна

В практике структурно-картировочных и разведочных работ обычно предпочтение отдается разломно-блоковым моделям глубинного строения. Однако, такие модели чрезвычайно громоздки в вычислительном плане. Числовые данные представлены массивами плотностей, как правило, постоянных в блоке, и соответствующими массивами координат вершин блоков. Для всей территории региона в трехмерном пространстве нахождение границ этих блоков невозможно по их сечениям в пределах сейсмических профилей. Это резко снижает информативность последующих количественных оценок и привносит в модель существенную субъективную доминанту интерпретатора. Как правило, математическое моделирование ограничивается уточнением параметров модели на основе интерактивной методики многократного решения прямой задачи гравиметрии. В применяемом в работе подходе плотностная модель строения земной коры представлена в формате кусочно-постоянной сеточной функции с большим разрешением, значения которой модифицируются в результате количественной интерпретации гравитационного поля. Сеточные алгоритмы легко

формализуются в независимые последовательности однотипных расчетов, что дает возможность использовать схемы параллельных вычислений. Разломно-блоковую конфигурацию среды можно «восстановить» из подобранной трехмерной сеточной модели. Наличие оригинальных алгоритмов решения прямой и линейной обратной задач гравиметрии для сеточных моделей, а также особенности применяемой методики разделения разноглубинных аномалий определяют научную новизну настоящей работы.

Практическая значимость

Предложенный аппарат решения линейной обратной задачи гравиметрии и пересчетов поля в рамках единой методики при наличии априорной информации (данные плотностного каротажа скважин, сейсмические разрезы вдоль профилей) позволяет строить геологически содержательные плотностные модели земной коры и верхней мантии. Протестированная параллельная программная реализация предложенных алгоритмов на GPU на порядок быстрее однопоточной, что позволяет использовать ее для построения моделей с большим числом элементов разбиения (порядка $1e9$).

Достоверность результатов исследований подтверждается согласованностью результатов проведенных численных экспериментов с применением различных методов.

Апробация работы

Результаты работы были представлены на следующих конференциях:

- 1) Международный семинар им. Д. Г. Успенского «Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей»: 2013 (Москва), 2014 (Екатеринбург), 2015 (Пермь), 2017 (Москва), 2019 (Пермь), 2020 (Воронеж) гг.
- 2) Научные чтения Ю.П. Булашевича «Геодинамика. Глубинное строение. Тепловое поле земли. Интерпретация геофизических полей», Екатеринбург: 2013, 2015 гг.
- 3) International Conference on Geoinformatics - Theoretical and Applied Aspects, Kyiv, Ukraine: 2015 г.

- 4) International Multidisciplinary Scientific GeoConference SGEM, Albena, Bulgaria: 2015, 2018 гг.
- 5) International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, Rhodes, Greece Republic: 2016 г.
- 6) Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences, Albena, Bulgaria: 2019 г.

Публикации

Общее количество работ, опубликованных по теме диссертации: **15** (1 монография). Публикации в рецензируемых изданиях, входящих в список ВАК – **11** (из них 7 индексируются Web of Science и Scopus, 3 только Scopus):

- 1) Мартышко П.С., Ладовский И.В., Бызов Д.Д. О решении обратной задачи гравиметрии на сетках большой размерности // Доклады Академии Наук. 2013. том 450. № 6. С. 702-707.
- 2) Мартышко П.С., Ладовский И.В., Осипов В.Ю., Бызов Д.Д., Цидаев А.Г. Методика и новые сеточные алгоритмы построения 3d плотностных моделей // Геофизика. 2013. №1. С. 41-47.
- 3) Martyshko P.S., Ladovsky I.V., Tsydaev A.G., Byzov D.D. 3D density model construction for Timan-Pechora region // Proceeding. of XIVth International Conference "Geoinformatics: Theoretical and Applied Aspects", 11-14 May 2015, Kiev, Ukraine. DOI: 10.3997/2214-4609.201412421. ISBN: 978-946282152-1.
- 4) Martyshko, P., Byzov, D., Ladovskiy, I., Tsidaev, A. 3D density models construction method for layered media // 15th International Multidisciplinary Scientific GeoConference SGEM 2015, www.sgem.org, SGEM2015 Conference Proceedings, ISBN 978-619-7105-33-9 / ISSN 1314-2704, June 18-24, 2015, Albena. Bulgaria. 1 (2), pp. 425-432.
- 5) Мартышко П.С., Ладовский И.В., Бызов Д.Д. Об устойчивых методах интерпретации данных гравиметрии // Доклады Академии Наук. 2016. том 471. № 6. С. 725-728. DOI: 10.7868/S0869565216360160.

- 6) Ладовский И.В., Мартышко П.С., Бызов Д.Д., Колмогорова В.В. О выборе избыточной плотности при гравитационном моделировании неоднородных сред // Физика Земли. 2017. №1. С. 138-147. **DOI:** 10.7868/S0002333716060053.
- 7) Petr S. Martyshko, Igor V. Ladovskii, Denis D. Byzov and Alexander G. Tsidaev Forward Gravity Problem Solution Optimization for the Finite Elements Approach // Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2016 (Icnaam-2016). Volume: 1863. No.: 050008. Published: 2017. Greece Republic, Rhodes. 19–25 September, 2016. DOI: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4992205>.
- 8) Petr S. Martyshko, Igor V. Ladovskii, Denis D. Byzov and Alexander G. Tsidaev On Stable Solution of 3D Gravity Inverse Problem // Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2016 (Icnaam-2016). Volume: 1863. No.: 050007. Published: 2017. Greece Republic, Rhodes. 19–25 September, 2016. DOI: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4992204>.
- 9) P. Martyshko, I. Ladovskii, D. Byzov, A. Tsidaev Density Earth's crust models creation using gravity and seismic data // 18th International Multidisciplinary Scientific GeoConference SGEM 2018, July 2-8, 2018, Albena, Bulgaria. www.sgem.org, SGEM2018 Conference Proceedings. Volume 18. Issue 1.1. 749-754 pp. **DOI:** 10.5593/SGEM2018/1.1.
- 10) Martyshko P.S., Ladovskii I.V., Byzov D.D., Tsidaev A.G. Gravity Data Inversion with Method of Local Corrections for Finite Elements Models // Geosciences. 2018. Vol. 8. Issue 10. № 373. **DOI:** <https://doi.org/10.3390/geosciences8100373>.
- 11) P. S. Martyshko, I. V. Ladovskii, D. D. Byzov, and A. G. Tsidaev On solutions of forward and inverse problem for potential geophysical fields: Gravity inversion for Urals region // Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences. AIP Conference Proceedings 2164, 120010 (2019). **DOI:** <https://doi.org/10.1063/1.5130870>.

Другие публикации по теме диссертации – 4 (индексируются РИНЦ):

- 1) Мартышко П.С., Ладовский И.В., Колмогорова В.В., Цидаев А.Г., Бызов Д.Д. Применение сеточных функций в задачах трехмерного плотностного моделирования // Уральский геофизический вестник. 2012. №1. С. 30-34.

- 2) Бызов Д.Д., Колмогорова В.В., Ладовский И.В., Мартышко П.С., Цидаев А.Г. О способе построения плотностных моделей слоисто-неоднородных сред // Уральский геофизический вестник. 2015. №1(25). С. 24-32.
- 3) Мартышко П.С., Ладовский И.В., Бызов Д.Д. О решении прямой задачи гравиметрии в рамках конечно-элементного подхода // Уральский геофизический вестник. 2015. №1(25). С. 42-45.
- 4) Мартышко П.С., Ладовский И.В., Федорова Н.В., Бызов Д.Д., Цидаев А.Г. Теория и методы комплексной интерпретации геофизических данных. Екатеринбург: УрО РАН, 2016. – 94 с. ISBN 978-5-7691-2463-1.

Структура и объем работы

Работа состоит из введения, пяти глав и заключения.

В главе 1 представлен быстрый алгоритм для вычисления гравитационного поля от модели с кусочно-постоянным распределением плотности на равномерной сетке, который выгодно отличается от существующих аналогов меньшим расходом ресурсов процессора и памяти. Повышение быстродействия стало возможным благодаря однократному вычислению значений первообразной (в интегральном представлении гравитационного поля) от одинаковых аргументов (множественно повторяющихся ввиду регулярности геометрии распределения точек счета поля и плотности в модели). Проведено тестирование однопоточной и параллельной программных реализаций алгоритма на CPU и GPU.

В главе 2 рассмотрен вопрос о выборе «плотности вмещающей среды» (плотности относимости) при построении региональных моделей земной коры и верхней мантии. Предложена схема вычисления избыточной плотности неоднородных элементов модели на фоне переменной плотности вмещающих пород. Разработан практический алгоритм вычисления аномалий гравитационного поля от отдельных частей модельного пласта с переменной плотностью. Показано, что избыточная плотность элементов внутри слоя, отнесенная к переменной по глубине «гидростатической» плотности нормальной модели, имеет существенно меньшую величину по всей глубине расчетной области и минимизирует гравитационное влияние плотностного контакта границ криволинейного слоя.

Возможности применения метода продемонстрированы на тестовом и практическом примерах.

В главе 3 на основе сеточных алгоритмов предложен метод интерпретации гравитационных аномалий (выделение плотностных неоднородностей): по аномалиям поля строится трехмерное распределение плотности в изучаемом объеме среды в формате сеточных функций. Процесс построения плотностных моделей сводится к решению линейной обратной задачи гравиметрии. На синтетических примерах показано, что при вариации задаваемых параметров модели можно получить принципиально разные распределения плотности в ней. При этом для всех вариантов модельное поле будет отличаться на установленную заранее погрешность. Так проявляется неединственность решения линейной обратной задачи. Чтобы выбрать параметризацию модели и получить устойчивое физически содержательное решение, нужно использовать априорную информацию: хорошую модель начального приближения, плотностной каротаж по скважинам или положение структурных границ по сейсмическим данным.

В главе 4 с целью разделения аномалий наблюдаемого гравитационного поля по глубине предложено использовать аппарат аналитического продолжения гармонических функций. Вычисление поля в верхнем полупространстве, т.е. вне области нижележащих масс выполняется по интегральной формуле Пуассона. Пересчет вниз через массы неоднородного слоя опирается на решение задачи аналитического продолжения потенциальных полей. Для разделения полей по глубине и локализации источников аномальных масс в горизонтальном слое была разработана технология последовательных пересчетов на несколько высот и глубин.

В главе 5 изложенный в предыдущих главах аппарат пересчетов и решения линейной обратной задачи гравиметрии применен к построению крупномасштабной модели приповерхностного слоя земной коры для территории 70×60 км².

Полный объем диссертации: 110 страниц текста, 31 рисунок, 2 таблицы. Список литературы включает 121 наименование.

Благодарности

Автор диссертационной работы выражает благодарность своему научному руководителю – доктору физико-математических наук, член-корреспонденту РАН, Петру Сергеевичу Мартышко за привлечение интереса к выбранной теме, всестороннюю поддержку в ходе проводимого исследования, а также предоставленную возможность работы в группе талантливых ученых – сотрудников лаборатории математической геофизики Института геофизики имени Ю.П. Булашевича.

Исследование выполнено при поддержке Российского Научного Фонда (проекты №№ 14-27-00059, 20-17-00058).

1 Прямая задача гравиметрии для сеточной функции плотности (вычисление значений поля по заданному распределению плотности)

Для успешной реализации методов решения линейной обратной задачи гравиметрии на сетках большой размерности требуется высокоэффективный алгоритм «быстрого» решения соответствующей прямой задачи. В работе [35] Автором предложен быстрый алгоритм для вычисления гравитационного поля от модели с кусочно-постоянным распределением плотности на равномерной сетке. В отличие от существующих аналогов для работы его программной реализации требуется меньше ресурсов процессора и памяти.

1.1 Быстрый алгоритм

Введём правую декартову прямоугольную систему координат. Пусть область D , заполненная массами с плотностью $\rho(x, y, z)$, представляет собой прямоугольный параллелепипед:

$$D = [x_{min}; x_{max}) \times [y_{min}; y_{max}) \times [z_{min}; z_{max}).$$

Точка $\vec{r} = (x, y, z) \in D$; $\vec{q} = (\xi, \eta, \zeta) \notin D$ – точка, в которой вычисляется поле;

$$R = |\vec{r} - \vec{q}|.$$

Вертикальная компонента гравитационного поля в точке \vec{q} вычисляется по формуле (γ – гравитационная постоянная; S – линейный оператор):

$$g(\vec{q}) = S\rho = \gamma \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_D \frac{\rho(\vec{r})}{R} dx dy dz; \quad (1)$$

Воспользуемся гريد-аппроксимацией функции $\rho(x, y, z)$ плотностного параллелепипеда. На трехмерной сетке $\{x_i, y_j, z_k\}$ ($i \in \overline{0, N_x}; j \in \overline{0, N_y}; k \in \overline{0, N_z}$, $x_i < x_{i+1}, y_j < y_{j+1}, z_k < z_{k+1}, x_0 = x_{min}, x_{N_x} = x_{max}, y_0 = y_{min}, y_{N_y} = y_{max}, z_0 = z_{min}, z_{N_z} = z_{max}$) построим элементы $D_{i,j}^k$

$$D = \bigcup_{i,j,k} D_{i,j}^k; \quad i \in \overline{0, N_x - 1}; j \in \overline{0, N_y - 1}; k \in \overline{0, N_z - 1}$$

$$D_{i,j}^k = [x_i; x_{i+1}) \times [y_j; y_{j+1}) \times [z_k; z_{k+1})$$

так, чтобы в пределах каждого из них плотность была постоянной:

$$\rho(x, y, z) = \rho_{i,j}^k, (x, y, z) \in D_{i,j}^k \quad (2)$$

С учетом (2), интеграл (1) заменяется суммой $N = N_x N_y N_z$ кубатурных элементов с постоянной плотностью:

$$g(\vec{q}) = -\gamma \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} \sum_{k=0}^{N_z-1} \rho_{i,j}^k \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{1}{R} \Big|_{z_k}^{z_{k+1}} dx dy; \quad (3)$$

Для того чтобы упростить вычисление вертикальной компоненты гравитационного поля, выполним следующие преобразования формулы (3). Обозначим через R_k расстояние от точки наблюдения (ξ, η, ζ) до переменной точки интегрирования (x, y, z_k) на глубине z_k :

$$R_k = R \Big|_{z = z_k} = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z_k)^2}$$

Объединяя в (3) слагаемые с одинаковыми индексами k обратных расстояний, получаем:

$$g(\vec{q}) = \gamma \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} \sum_{k=0}^{N_z} \Delta \rho_{i,j}^k S_{i,j}^k; \quad (4)$$

где $\Delta \rho_{i,j}^k$ – поэлементная разность плотностей k и $k-1$ горизонтальных слоев: $\Delta \rho_{i,j}^k = \rho_{i,j}^k - \rho_{i,j}^{k-1}$, ($k \in \overline{1, N_z - 1}$) и $\Delta \rho_{i,j}^0 = \rho_{i,j}^0$, $\Delta \rho_{i,j}^{N_z} = -\rho_{i,j}^{N_z-1}$; $S_{i,j}^k$ – потенциал горизонтальной грани ячейки (i, j, k) или $(i, j, k-1)$ на глубине z_k с единичной плотностью [14, 57]:

$$\begin{aligned} S_{i,j}^k(\xi, \eta, \zeta) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{1}{R_k} dx dy = \\ &= ((x - \xi) \ln(y - \eta + R_k) + (y - \eta) \ln(x - \xi + R_k) - \\ &- (z_k - \zeta) \operatorname{arctg} \left(\frac{(x - \xi)(y - \eta)}{(z_k - \zeta) R_k} \right)) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} \Big|_{y_j}^{y_{j+1}} \end{aligned} \quad (5)$$

Представление решения в форме (4) – (5) дает возможность оптимизировать алгоритм вычисления поля для слоя, расположенного между произвольными отметками глубин.

Формулу (3) запишем в виде:

$$g(\vec{q}) = \gamma \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} \sum_{k=0}^{N_z-1} \rho_{i,j}^k G_{i,j}^k(\vec{q}), \quad (6)$$

где $G_{i,j}^k(\vec{q})$ – поле в точке \vec{q} с точностью до коэффициента γ параллелепипеда $D_{i,j}^k$ с единичной плотностью, которое вычисляется по формуле [14] (подстановка производится в \vec{r}):

$$G_{i,j}^k(\vec{q}) = -v(\vec{r} - \vec{q}) \begin{vmatrix} x_{i+1} & y_{j+1} & z_{k+1} \\ x_i & y_j & z_k \end{vmatrix}, \quad (7)$$

$$v(\vec{a}) = a_x \ln(a_y + |\vec{a}|) + a_y \ln(a_x + |\vec{a}|) - a_z \operatorname{arctg} \left(\frac{a_x a_y}{a_z |\vec{a}|} \right).$$

Обозначим $\vec{r}_{i,j}^k = (x_i, y_j, z_k)$ и раскроем в (6) $G_{i,j}^k(\vec{q})$ по формуле (7):

$$\begin{aligned} g(\vec{q}) = & -\gamma \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} \sum_{k=0}^{N_z-1} \rho_{i,j}^k (v(\vec{r}_{i+1,j+1}^{k+1} - \vec{q}) - v(\vec{r}_{i,j+1}^{k+1} - \vec{q}) - v(\vec{r}_{i+1,j}^{k+1} - \vec{q}) + \\ & + v(\vec{r}_{i,j}^{k+1} - \vec{q}) - v(\vec{r}_{i+1,j+1}^k - \vec{q}) + v(\vec{r}_{i,j+1}^k - \vec{q}) + v(\vec{r}_{i+1,j}^k - \vec{q}) - \\ & - v(\vec{r}_{i,j}^k - \vec{q})) \end{aligned} \quad (8)$$

Теперь объединим слагаемые с одинаковыми индексами при $\vec{r}_{i,j}^k$:

$$\begin{aligned} g(\vec{q}) = & -\gamma \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} \sum_{k=0}^{N_z} v(\vec{r}_{i,j}^k - \vec{q}) (\rho_{i-1,j-1}^{k-1} - \rho_{i-1,j}^{k-1} - \rho_{i,j-1}^{k-1} + \rho_{i,j}^{k-1} - \\ & - \rho_{i-1,j-1}^k + \rho_{i-1,j}^k + \rho_{i,j-1}^k - \rho_{i,j}^k) = \gamma \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} \sum_{k=0}^{N_z} \bar{\rho}_{i,j}^k v(\vec{r}_{i,j}^k - \vec{q}) \end{aligned} \quad (9)$$

считаем, что $\rho_{i,j}^k = 0$, если $i = -1 \vee i = N_x \vee j = -1 \vee j = N_y \vee k = -1 \vee k = N_z$.

При использовании формулы (8) необходимо $8N$ раз вычислить значение функции v , при использовании формулы (9) – только $(N_x + 1)(N_y + 1)(N_z + 1)$ раз, что дает почти восьмикратное уменьшение времени счета для достаточно больших N .

Пусть $D_{i,j}^k$ – равновеликие параллелепипеды, т.е. $x_i = x_0 + i\Delta x$, $y_j = y_0 + j\Delta y$, $z_k = z_0 + k\Delta z$, $\Delta x > 0$, $\Delta y > 0$, $\Delta z > 0$. Выпишем формулу для вычисления

множества \vec{T} значений g в точках множества \vec{t} в узлах равномерной прямоугольной двумерной сетки, ориентированной аналогично D , расположенной в плоскости, параллельной грани D , с расстояниями между узлами по двум измерениям Δx и Δy .

Знак вектора при обозначении \vec{T} и \vec{t} нужно понимать в том смысле, что указанные множества суть кортежи: в них важен порядок следования элементов.

$\vec{t} = (\vec{q}_m)_{m=0}^{M-1}$, $\vec{q}_m = (\xi_{i_1}, \eta_{j_1}, \zeta)$, $\xi_{i_1} = \xi_0 + i_1 \Delta x$, $\eta_{j_1} = \eta_0 + j_1 \Delta y$, $\zeta \in (z_{min}; z_{max})$, $i_1 \in \overline{0, M_x - 1}$, $j_1 \in \overline{0, M_y - 1}$, $m = i_1 + M_x j_1$, $M = M_x M_y$.

$$\vec{T} = (g(\vec{q}_m))_{m=0}^{M-1} = \gamma \left(\sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} \sum_{k=0}^{N_z-1} \rho_{i,j}^k G_{i,j}^k(\vec{q}_m) \right)_{m=0}^{M-1} \quad (10)$$

Для расчета \vec{T} по формуле (10) требуется $8MN$ раз вычислить значение v . Применим оптимизацию (9):

$$\vec{T} = \gamma \left(\sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} \sum_{k=0}^{N_z} \bar{\rho}_{i,j}^k v(\vec{r}_{i,j}^k - \vec{q}_m) \right)_{m=0}^{M-1} \quad (11)$$

По данной формуле v нужно вычислять уже $M(N_x + 1)(N_y + 1)(N_z + 1)$ раз. Однако, при указанном \vec{t} среди множества векторов $\vec{r}_{i,j}^k - \vec{q}_m$ есть большое количество совпадений, для которых v можно считать один раз:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{i,j}^k - \vec{q}_m &= (x_0 + i \Delta x - (\xi_0 + i_1 \Delta x), y_0 + j \Delta y - (\eta_0 + j_1 \Delta y), z_k - \zeta) = \\ &= (x_0 - \xi_0 + (i - i_1) \Delta x, y_0 - \eta_0 + (j - j_1) \Delta y, z_k - \zeta) \end{aligned}$$

Если ввести новые индексы $i_2 = i - i_1$, $i_2 \in \overline{1 - M_x, N_x}$, $j_2 = j - j_1$, $j_2 \in \overline{1 - M_y, N_y}$ и обозначить $v_{i_2, j_2}^k = v(x_0 - \xi_0 + i_2 \Delta x, y_0 - \eta_0 + j_2 \Delta y, z_k - \zeta)$, то (11) можно переписать в виде:

$$\vec{T} = \gamma \sum_{k=0}^{N_z} \left(\sum_{i_2=-i_1}^{N_x-i_1} \sum_{j_2=-j_1}^{N_y-j_1} \bar{\rho}_{i_1+i_2, j_1+j_2}^k v_{i_2, j_2}^k \right)_{m=0}^{M-1} \quad (12)$$

Таким образом, v необходимо вычислять лишь в $(N_x + M_x)(N_y + M_y)(N_z + 1)$ точках, что на два порядка меньше, чем по формулам (10) или (11). Следует отметить, что возможна программная реализация (12), при которой не нужно

хранить множество $\{v_{i_2, j_2}^k | i_2 \in \overline{1 - M_x, N_x}, j_2 \in \overline{1 - M_y, N_y}, k \in \overline{0, N_z}\}$, если использовать его элементы в соответствующих слагаемых суммы по мере вычисления. Это экономит память и никак не сказывается на производительности.

Предложенный способ решения прямой задачи по сравнению с [48] (для параллелепипедов) обладает двумя преимуществами: 1) не требуется симметрия множества \vec{t} относительно разбиения D (т.е. не требуется условий $x_0 - \xi_0 = \frac{\Delta x}{2} l_x$, $y_0 - \eta_0 = \frac{\Delta y}{2} l_y$, $l_x \in \mathbb{Z}$, $l_y \in \mathbb{Z}$, $N_x = M_x$, $N_y = M_y$); 2) (12) даже в теории почти в 2 раза быстрее (как показывает практика, чем больше N , тем быстрее), т.к. в [48] на «шаге 1» вычисляется множество $\{G_{0,0}^k(\xi_{i_1}, \eta_{j_1}, \zeta) | i_1 \in \overline{0, N_x - 1}, j_1 \in \overline{0, N_y - 1}, k \in \overline{0, N_z - 1}\}$ (при указанных в пункте 1 условиях), это требует $8N_x N_y N_z$ вычислений значений u , тогда как в (12) при тех же условиях – только $4N_x N_y (N_z + 1)$.

1.2 Примеры счета

Для оценки ускорения расчетов по формуле (12) по сравнению с формулой (10) проведена серия вычислений поля от трехмерной плотностной грид-модели с различным числом элементов ее разбиения и детализацией сетки поля. Параметры разбиений и время счета приведены в таблице 1. Вычисления проводились на одном ядре процессора Intel Xeon E5-2620 v2 с тактовой частотой 2,5 ГГц и в параллельном варианте – на одном GPU NVidia Titan Black. На рисунках 1 – 3 представлены соответствующие графики.

Таблица 1 – Зависимость времени счета от параметров разбиения модели и сетки вычисления поля.

$N_x * N_y * N_z$	$N = N_x * N_y * N_z$	Время счета на CPU, формула (10), с	Время счета на CPU, формула (12), с	Время счета на GPU, формула (12), с
50*50*50	125000	227	10	0.95
75*75*75	421875	1725	36	3.66
100*100*100	1000000	7269	84	8.71
125*125*125	1953125	22183	165	17.05
150*150*150	3375000	55197	284	29.43
175*175*175	5359375	119304	451	46.73
200*200*200	8000000	232602	673	69.71
250*250*250	15625000	709844	1313	136.03

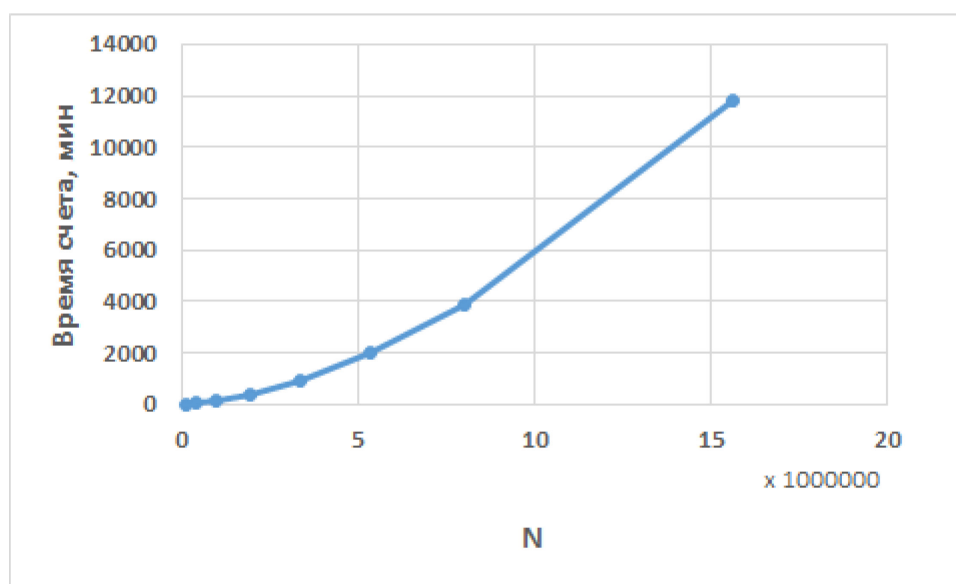


Рисунок 1. Зависимость времени счета поля на 1 ядре CPU Intel Xeon E5-2620 v2 по формуле (10) от числа элементов разбиения модели.

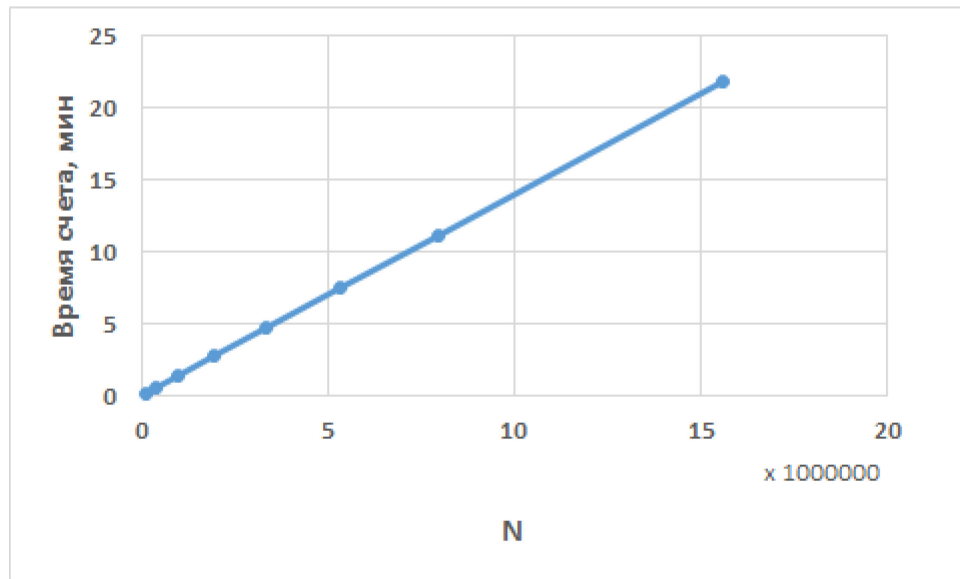


Рисунок 2. Зависимость времени счета поля на 1 ядре CPU Intel Xeon E5-2620 v2 по формуле (12) от числа элементов разбиения модели.

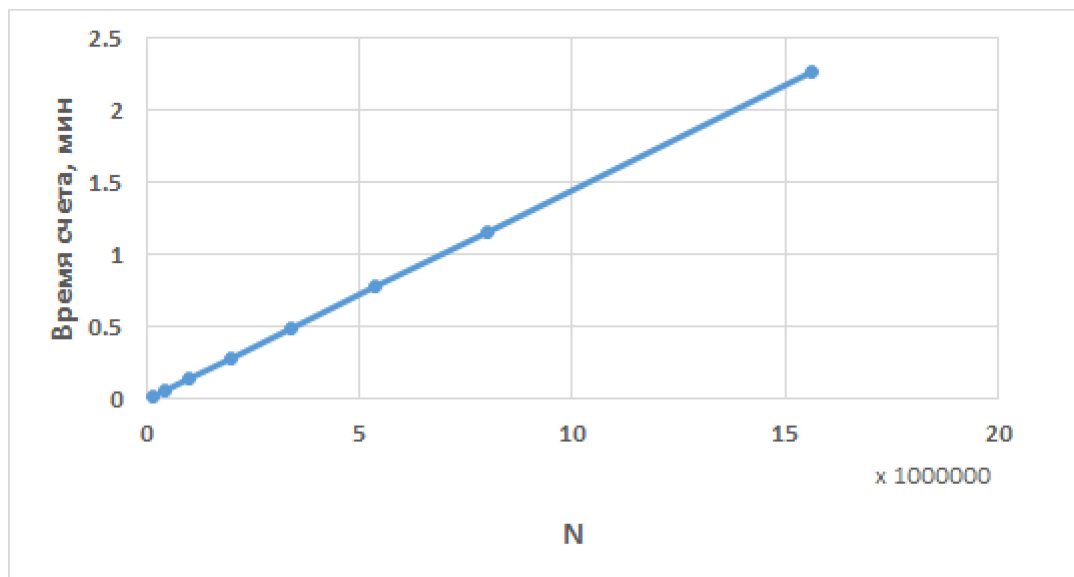


Рисунок 3. Зависимость времени счета поля на GPU NVidia Titan Black по формуле (12) от числа элементов разбиения модели.

1.3 Выводы по главе

В данной главе представлен быстрый алгоритм для вычисления гравитационного поля от модели с кусочно-постоянным распределением плотности на равномерной сетке, который выгодно отличается от существующих аналогов меньшим расходом ресурсов процессора и памяти. Повышение быстродействия стало возможным благодаря однократному вычислению значений

первообразной (в интегральном представлении гравитационного поля) от одинаковых аргументов (многократно повторяющихся ввиду регулярности геометрии распределения точек счета поля и плотности в модели). Алгоритм можно использовать как важную составную часть методов автоматизированной интерпретации.

2 Выбор плотности относимости при решении прямой задачи гравиметрии.

В практике гравитационного моделирования зачастую используют прием разделения суммарного поля по отдельным слоям (и блокам) неоднородной плотностной модели. Расчет гравитационных аномалий от элементов известного плотностного фрагмента и введение соответствующей поправки в наблюдаемое поле получило название «геологического редуцирования» [71]. Как правило, подобным образом исключается вклад осадочного чехла (реже – кристаллической земной коры) с тем, чтобы из разности аномалий выделить глубинную (мантийную) составляющую гравитационного поля [22, 31, 43]. При этом возникает проблема выбора «плотности вмещающей среды» (плотности относимости) для вычисления и надлежащего учета фрагментарных аномалий, как от глубинных, так и приповерхностных объектов.

Аномальное гравитационное поле от однородного изолированного включения вычисляется по скачку его плотности относительно плотности вмещающих пород. В реальных геологических моделях неоднородных сред практически невозможно однозначно определить избыточную плотность какого-либо отдельного фрагмента относительно переменной плотности вмещающей среды. Соответственно, на практике выбирают самый простой путь решения проблемы. Плотность «вмещающей среды» для модели неоднородного слоя приравнивают к некоторой постоянной величине. Это либо нулевая [53, 62], либо средневзвешенная плотность слоя [16, 31], либо максимальная плотность мантийных блоков [22, 23]. Относительно принятой постоянной рассчитывают избыточную плотность для всей совокупности неоднородных элементов внутри слоя. Однако, следует учесть гравитационное влияние и внешних границ обрамления слоя. К аномалиям поля от «внутренней» области обязательно добавится «фоновая» составляющая от плотностного контакта на внешних границах. Для плоских границ аномальный гравитационный эффект равняется нулю; для криволинейных – появляется переменная фоновая составляющая поля. Ее амплитуда пропорциональна скачку плотности на внешних границах криволинейного слоя [30]. В таком случае не только морфология границ

обрамления, но и перепад плотности в приграничной области имеет решающее влияние на результат выделения из суммарного поля собственно аномалий от плотностных неоднородностей внутри слоя с криволинейными границами. Корректный учет переменного фона гравитационных аномалий от неоднородных плотностных фрагментов имеет важное значение для разработки устойчивых методов разделения наблюдаемого поля по глубине и построения послойных плотностных моделей кристаллической земной коры и верхней мантии.

2.1 Задача геологического редуцирования. Нормальная плотность региональной модели

Решение задачи геологического редуцирования предусматривает вычисление аномального поля от изначально заданной конфигурации модельных плотностных фрагментов. Их влияние учитывается исключением (редукцией) фрагментарных аномалий из общего поля модели. Амплитуда редуцируемых аномалий зависит от соотношения между плотностью исключаемого объекта и плотностью пород сопредельных областей. В работах [6, 26] предлагается способ построения переменной «плотности вмещающей среды», на фоне которой вычисляется избыточная плотность элементов неоднородной плотностной модели. Применение этого способа позволяет корректно рассчитать и исключить влияние плотностных слоев с криволинейными границами раздела и переменной плотностью.

Аномальное гравитационное поле от некоторой области D с плотностью ρ вычисляется по интегральной формуле:

$$g(\vec{q}) = \gamma \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_D \frac{\rho(\vec{r}) - \sigma(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{q}|} dV, \quad (13)$$

здесь γ – гравитационная постоянная, \vec{q} и \vec{r} – радиус-векторы точки наблюдения и текущей точки интегрирования внутри масс, σ – плотность вмещающей среды (далее плотность относимости), относительно которой находится избыточная плотность в каждой точке области D : $\rho(\vec{r}) - \sigma(\vec{r})$.

Очевидно, что в соответствии с принятым распределением плотности относимости $\sigma(\vec{r})$, будет меняться не только форма, но и знак расчетной аномалии поля. Для полного исключения гравитационного эффекта области D формула (13) предписывает выполнение очевидного действия: значение фактической плотности ρ внутри области следует поменять на плотность вмещающей среды σ :

$$\rho(\vec{r}) \rightarrow \sigma(\vec{r}) \quad (14)$$

В случае однородной плотности вмещающей среды $\sigma(\vec{r}) = \sigma_0 = const$ редукция замещения (13)–(14) однозначна: вклад исключаемой из гравитационной модели области D будет равен нулю. Если же неоднородная геологическая среда моделируется набором соприкасающихся тел D_k ($k=1,2,\dots$) с различной плотностью ρ_k (что и реализуется в большинстве практических случаев), то задача геологического редуцирования становится неопределенной. Даже если плотность ρ_k внутри каждого отдельного объекта D_k известна или предполагается таковой, то «плотность вмещающей среды» σ для совокупного ансамбля неоднородных тел требует уточнения. Невозможно определить нулевую избыточную плотность (14) отдельного редуцируемого фрагмента неоднородной среды; при замещении $\rho_k \rightarrow \sigma_0$ от исключаемых аномалий останется некоторая переменная составляющая. Поэтому, выбор обобщающего распределения плотности относимости σ следует унифицировать таким образом, чтобы для всей совокупности элементов D_k неоднородной модели минимизировать расчетные значения избыточной плотности $\rho_k - \sigma$ и уменьшить «остаточную» составляющую редуцируемых аномалий.

Нормальная плотностная модель региона рассматривается, как часть верхней оболочки планетарной модели Земли, поэтому принципы их построения должны быть взаимосвязанными. Кроме того, региональная модель должна отражать специфику глубинного строения исследуемой территории, сохраняя значимость интегральных оценок петрофизических параметров различных геологических провинций. Обоим этим требованиям, в какой-то мере, удовлетворяет плотностная модель для горизонтально-однородной слоистой среды, наследующая как планетарные, так и региональные признаки.

Приведение инструментально измеренных значений силы тяжести к аномалиям Фая (аномалиям в свободном воздухе) фактически решает вопрос о выборе плотностной модели Нормальной Земли – планетарной модели гидростатически равновесного сфероида с эквивалентным распределением масс. Распределение плотности «жидкого» сфероида зависит только от расстояния до притягивающего центра. Конфокальные поверхности постоянной плотности имитируют слоистую структуру оболочек планетарной модели [20]. При переходе к задачам регионального масштаба сфероидальный сегмент внешней оболочки (литосферы) фактически заменяется моделью плоского слоя [17, 22, 43]. Соответствующий одномерный аналог нормального распределения плотности в горизонтально-однородной модели слоистой среды будет зависеть только от глубины; только от глубины будет зависеть и гидростатическое давление в плоском слое.

В региональных задачах гравитационного моделирования предлагается заменить постоянное значение плотности относимости $\sigma = const$ на одномерное распределение гидростатической плотности $\sigma = \sigma_0(z)$ нормальной модели. Надгидростатические добавки избыточной плотности будут иметь существенно меньшую амплитуду для всей совокупности неоднородных элементов, что приведет к уменьшению компенсационных составляющих фона редуцированных аномалий на любой глубине.

2.2 Тестовый пример

По схеме «геологического редуцирования» плотность исключаемого фрагмента в неоднородном слое замещается плотностью относимости, смысловой эквивалент которой соответствует «плотности вмещающей среды» σ . Редукция аномалий в неоднородном слое с параметрами, близкими к модели земной коры и верхней мантии, позволяет оценить степень привнесенных искажений остаточного поля только за счет выбора различных значений «плотности вмещающей среды».

На рисунке 4 представлен схематический плотностной разрез глубиной до 80 км. Приповерхностная прямоугольная вставка с плотностью $\rho_D=2.2$ г/см³ до

глубины 10 км имитирует фрагмент низкоплотного осадочного чехла (структурной впадины). Нижележащий слой с криволинейной границей соответствует кристаллическому фундаменту с плотностью $\rho_F=2.8 \text{ г/см}^3$. Глубинный горизонтальный пласт с переменной плотностью моделирует тяжелые мантийные блоки с плотностью $\rho_M \in (3.2, 3.4) \text{ г/см}^3$. Справа от разреза вынесена колонка горизонтально усредненных значений плотности нормальной модели. Усреднение выполняется по средневзвешенным элементам плотности в пределах каждого неоднородного слоя.

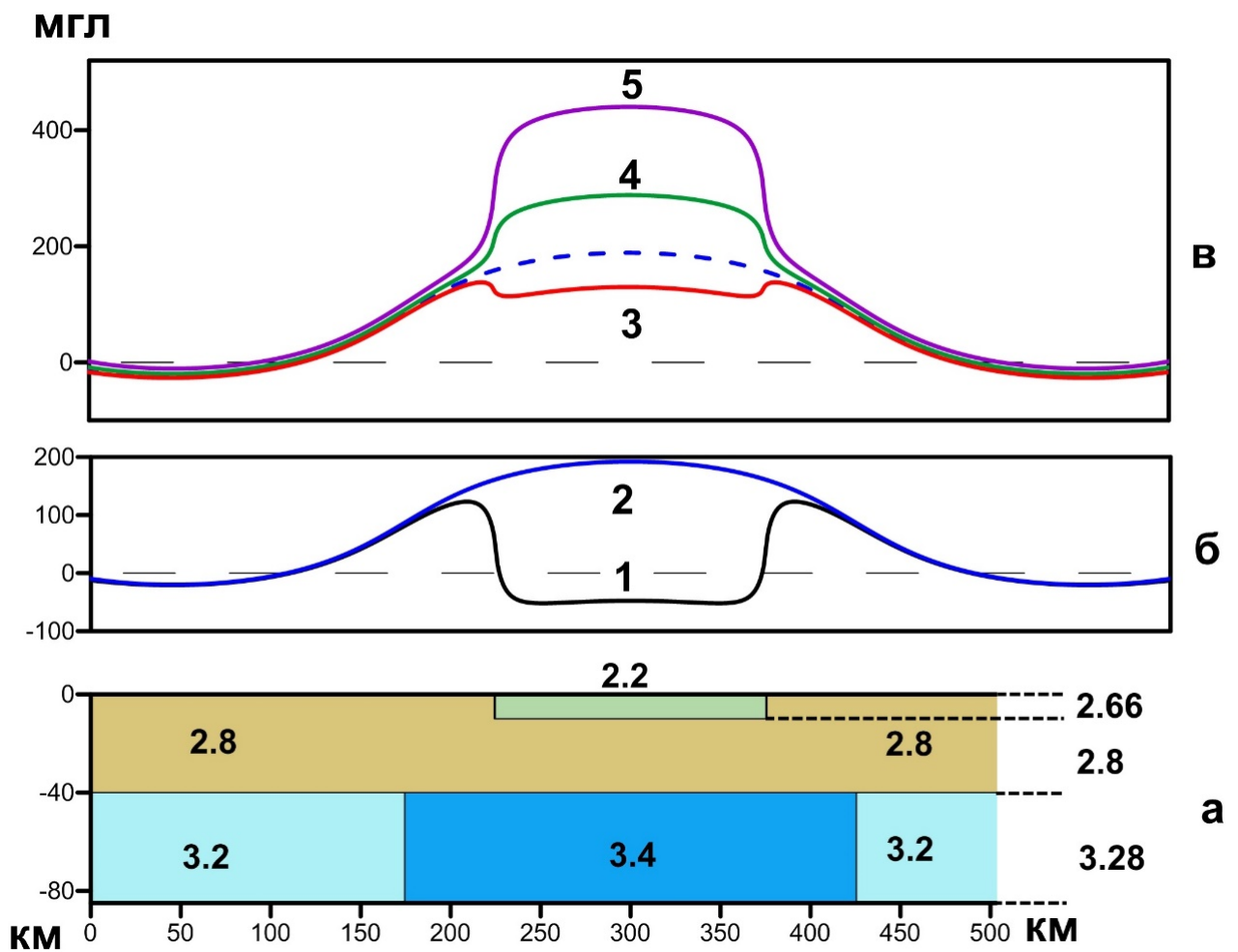


Рисунок 4. Схема гравитационного редуцирования для приповерхностного включения: а) неоднородный плотностной разрез; б) суммарное модельное поле (1); поле без приповерхностного включения (2); в) поле в редукиции относительно одномерной плотности $\sigma_0(z)$ (3); то же, но относительно средневзвешенной плотности 3.04 г/см^3 (4) и максимальной плотности разреза 3.4 г/см^3 (5).

Для приповерхностного включения подстилающие породы однородного фундамента являются вмещающей средой. Избыточная плотность включения $\rho_D - \rho_F = -0.6 \text{ г/см}^3$ формирует локальную отрицательную аномалию на общем фоне глубинных масс.

Проанализируем четыре практически применяемые схемы замещения плотности ρ_D на плотность относимости σ и сопоставим между собой полученные результаты. На рисунке 4б приведен теоретически возможный вариант исключения приповерхностной неоднородности, когда ее плотность ρ_D , в соответствии с формулой (14), замещается плотностью вмещающей среды σ , которая фактически приравнена к плотности ρ_F однородного фундамента: $\rho_D \rightarrow \sigma = \rho_F = 2.8 \text{ г/см}^3$. В этом случае поле редуцированной модели (кривая 2 на рис. 4б) с точностью до постоянного фона, совпадает с полем глубинных мантийных блоков. Любая редукция относительно иной, чем ρ_F , «плотности вмещающей среды» приводит к появлению остаточной составляющей нескомпенсированных аномальных масс. Практически возможные варианты схемы «геологического редуцирования» и соответствующие им остаточные разности модельных полей показаны на рисунке 4в (кривые 3, 4, 5). Здесь же пунктиром продублирована кривая 2 теоретической модели.

Сравнительные величины остаточных аномалий поля g от приповерхностного включения с избыточной плотностью $\sigma - \rho_F$ в редукции замещения $\rho_D \rightarrow \sigma$ сведены в таблицу 2. Аномалии приведены к переменному уровню теоретической модели 2. Номер модельных вариантов в таблице соответствует номеру кривых на рисунке 4.

Из данных таблицы 2 и приведенных на рисунке 4 графиков полей видно, что чем больше избыточная плотность в редукции замещения, тем выше амплитуда остаточных аномалий. Помимо тривиального случая в варианте 2, наименьшие искажения в поле редуцированной модели вносит избыточная плотность, заданная относительно условно «гидростатической» плотности: $\rho_D \rightarrow \sigma_0(z) = 2.66 \text{ г/см}^3$. В этом случае эффект нескомпенсированной аномалии проявляется незначительно

(кривая 3). Редукция на средневзвешенную плотность $\rho_D \rightarrow 3.04 \text{ г/см}^3$ дает сравнительно заметную перекомпенсацию остаточной аномалии (кривая 4). Совершенно неприемлема редукция низкоплотных объектов осадочного чехла относительно мантийной плотности: $\rho_D \rightarrow \rho_M = 3.4 \text{ г/см}^3$. Здесь мы имеем дело уже с двукратной перекомпенсацией остаточной аномалии (кривая 5). Еще хуже редукция относительно нулевой плотности «вмещающей среды». В данном примере, при мощности включения порядка 10 км, в остаточное поле гравитационных аномалий добавляется отрицательная составляющая амплитудой более 1000 мГал.

Таблица 2 – Плотность относимости и величины остаточных аномалий поля

модель	$\sigma, \text{ г/см}^3$	$\sigma - \rho_F, \text{ г/см}^3$	$g, \text{ мГал}$
1	2.2	-0.6	-238.27
2	2.8	0	0
3	2.66	-0.14	-55.76
4	3.04	+0.24	+94.31
5	3.4	+0.6	+238.27
6	0	-2.8	-1111.92

Приведенные выше результаты кажутся, на первый взгляд, очевидными для рафинированного тестового примера, однако имеют принципиальное значение при решении практических прикладных задач в рамках модели неоднородного слоя с криволинейными границами. Плотность относимости – это внешний параметр гравитационного моделирования, но от его значения зависят амплитуда, форма и даже знак расчетных аномалий отдельных плотностных фрагментов. В суперпозиции аномалий обязательно проявится составляющая фонового поля. Для модели неоднородного слоя с горизонтальными границами фоновая составляющая поля – постоянная величина, которая исключается из схемы интерпретации. Если же хотя бы одна из границ слоя криволинейна, то составляющая фона будет

переменной. Такие переменные составляющие фона проявляются при расчетах гравитационного поля от каждого криволинейного слоя, но компенсируют друг друга в результирующей составной модели плоского литосферного пласта. Поскольку при интерпретации аномалий от отдельных слоев не задействованы составляющие компенсационного фона, то влияние последнего необходимо свести к минимуму. Наиболее оптимальная и практически доступная схема поинтервального геологического редуцирования – замещение плотности неоднородного фрагмента на одномерную «гидростатическую» плотность нормальной модели горизонтально-слоистой среды. Другие варианты редукции на постоянную плотность неприемлемы для приповерхностных неоднородностей, как по амплитуде, так и знаку исключаемых полей (см. данные таблицы 2).

2.3 Послойное редуцирование градиентной модели литосферы Тимано-Печорской плиты

Региональные плотностные модели земной коры и верхней мантии (верхней части литосферы) чаще всего строят в форме пласта с горизонтальными границами обрамления [17, 22, 31, 43]. Такое ограничение является непрременным условием для вычисления гравитационных аномалий от неоднородного слоя с точностью до постоянной составляющей фона. Не возникает вопроса и с определением плотности относимости (или «плотности вмещающей среды») для плоской модели литосферного слоя. Это может быть любая постоянная величина, относительно которой вычисляется избыточная плотность для всех элементов неоднородной модели.

В [26] предлагается рассматривать подобранное (по заданному полю) распределение плотности в неоднородном слое с горизонтальными границами, как предварительный этап решения задачи гравитационного моделирования. Для разделения суммарного гравитационного поля на фрагментарные составляющие от разнесенных по глубине криволинейных слоев, следует приравнять плотность относимости внутри каждого слоя к одномерному распределению гидростатической плотности нормальной модели. Методика вычисления полей от 3D слоев с переменной плотностью и криволинейными границами разработана на

основе сеточных технологий трехмерного гравитационного моделирования [34, 35]. Рассмотрим подробнее ее детали на практическом примере.

В ИГФ УрО РАН при участии Автора построена трехмерная плотностная модель литосферы Тимано-Печорского региона. В ее основе лежит пространственный каркас двумерных скоростных и сейсмоплотностных разрезов, покрывающих градусную трапецию с координатами $59^\circ - 68^\circ$ с.ш., и $48^\circ - 64^\circ$ в.д. [17, 32]. Глубина разрезов соответствует первому региональному уровню изостатической компенсации около 80 км [15]. Модельное поле соответствует наблюдаемому с относительной погрешностью менее 1%. При вычислении избыточной плотности относительно одномерного гидростатического распределения не требуется вводить поправку за постоянную составляющую расчетного фона: аномальная часть модельного поля на любом глубинном срезе всегда будет отнесена к нулевому уровню. Это, кроме того, уменьшает «разброс» избыточной плотности для всей глубины сеточного параллелепипеда.

На рисунке 5 (левая часть) показано 3D распределение плотности для Тимано-Печорской плиты, построенное в формате сеточного параллелепипеда. Интервал дискретизации в горизонтальной плоскости не более 1 км; шаг по глубине – 100м. При таком шаге пространственной дискретизации сеточные модели распределения плотности имеют фактически континуальный характер и носят название «градиентные» модели глубинного строения литосферного слоя [31].

Вычисляя средние значения по горизонтальным срезам плотностного параллелепипеда, получаем зависящую только от глубины гидростатическую плотность $\sigma_0(z)$ нормальной модели (рис. 5 справа). Ее изменение по глубине, в общих чертах, повторяет изменение максимальных и минимальных значений подобранной плотности литосферного пласта. Для средневзвешенной плотности получаем значение $\sigma_{cp}=3.09$ г/см³. Сравнительно с постоянным уровнем σ_{cp} , избыточная плотность, отнесенная к переменному уровню $\sigma_0(z)$, меняется в значительно меньшей степени на разных глубинных горизонтах. Соответственно,

на тех же глубинах уменьшится амплитуда расчётных аномалий гравитационного поля для отдельных плотностных фрагментов неоднородной модели литосферного слоя.

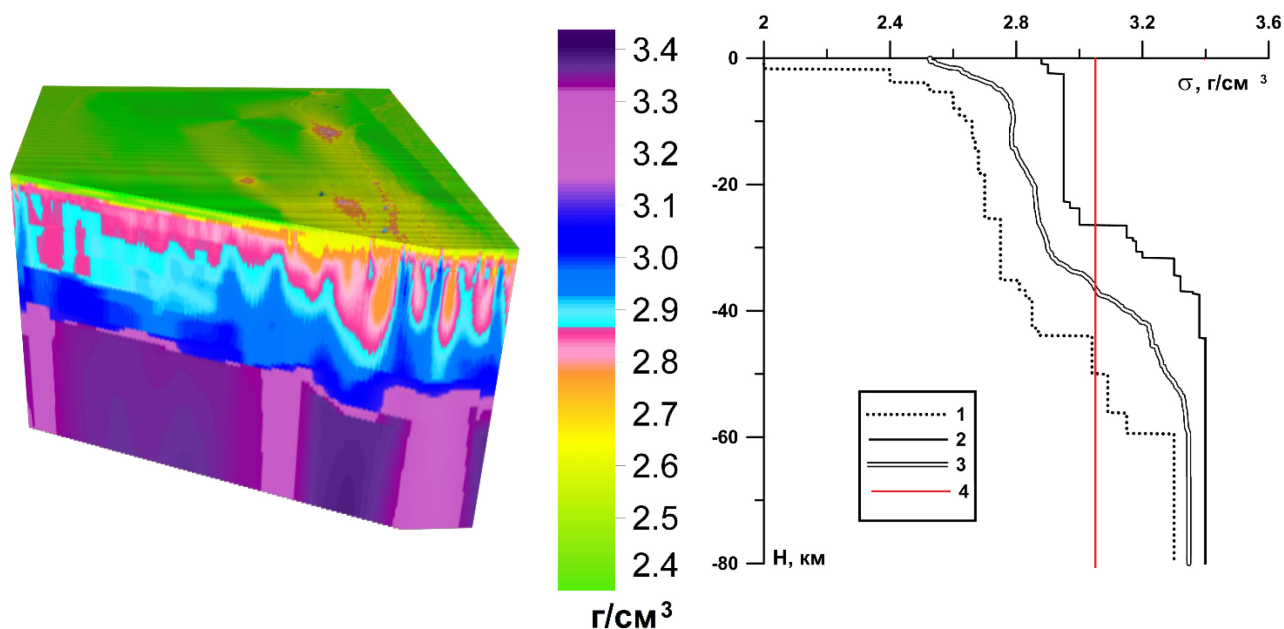


Рисунок 5. Трёхмерная плотностная модель Тимано-Печорской плиты и график изменения по глубине гидростатической плотности модели (кривая 3). Здесь же приведены графики минимальных (кривая 1) и максимальных (кривая 2) значений плотности по горизонтальным срезам модели. Вертикальная прямая 4 соответствует средневзвешенной плотности 3.09 г/см^3 модели.

Упорядоченные элементы сейсмоплотностной модели литосферы организованы в иерархическую систему слоисто-блоковых структурных комплексов [17]. Признаки подобной организации просматриваются и в сеточном решении на рисунке 5 для «градиентной» плотностной модели Тимано-Печорской плиты. Для построения картографических схем тектонического районирования целесообразно перейти от трёхмерного распределения плотности сеточной модели к некоторому содержательному набору структурных геологических границ, с постоянной или переменной плотностью. По характерному скачку сейсмических и плотностных параметров в модели уверенно прослеживаются две основные, регионально выдержанные структурные границы – поверхность

консолидированного фундамента и поверхность Мохо [26]. Для подошвы осадочного чехла $F(x, y, z_F)$ интервал изменения подстилающих плотностей составил $(\sigma_{min} \div \sigma_{max}) = (2.67 \div 2.86)$ г/см³; для кровли верхней мантии $M(x, y, z_M) - (\sigma_{min} \div \sigma_{max}) = (3.24 \div 3.42)$ г/см³. Выделенные границы разделяют литосферный слой на три неоднородных плотностных фрагмента: осадочный чехол, кристаллическую земную кору и верхнюю мантию. Гравитационный эффект для каждого из них рассчитывается в рамках модели криволинейного пласта с переменной плотностью.

Обозначим через H мощность литосферного пласта; F и M – разделяющие его промежуточные границы. В формуле (13) интегрирование по области D распространяется на весь плоский неоднородный пласт бесконечного простирания $D = (-\infty; +\infty) \times (-\infty; +\infty) \times [-H; 0]$. Считая что $\vec{q} = (\xi, \eta, \zeta)$, $\vec{r} = (x, y, z)$, запишем модельное поле в виде суммы аномалий от трех слоев с криволинейными границами:

$$g(\vec{q}) = \gamma \iint_{-\infty}^{+\infty} dx dy \left(\int_{-H}^{M(x,y)} + \int_{M(x,y)}^{F(x,y)} + \int_{F(x,y)}^0 \right) \frac{z - \zeta}{|\vec{r} - \vec{q}|^3} (\rho(\vec{r}) - \sigma_0(z)) dz \quad (15)$$

Интегрирование по всему пласту с фактической плотностью ρ дает значение поля в абсолютных единицах. Интеграл от одномерной плотности относимости $\sigma_0(z)$ (при любом законе ее распределения) дает постоянную составляющую фона. Но в пределах каждого отдельного слоя составляющая фона будет переменной величиной, зависящей от формы границ криволинейной области интегрирования в формуле (15).

В качестве иллюстрирующего примера выделим аномалию от приповерхностного фрагмента трехмерной плотностной модели Тимано-Печерской плиты, построенной в лаборатории математической геофизики ИГФ УрО РАН [26]. Слой с переменной плотностью, ограниченный дневной поверхностью и поверхностью фундамента $F(x, y)$ моделирует строение низкоплотностного осадочного чехла. Это часть сеточной модели литосферного пласта. Оставляя в формуле (15) интеграл от избыточной плотности чехла, мы

исключаем из расчетов гравитационное влияние коры и мантии. На нижней части рисунка 6 приведена плотностная модель осадочного чехла, построенная путем бланкирования сеточных элементов литосферного пласта ниже границы F .

Над выделенным плотностным фрагментом построены трехмерные графики расчетных аномалий гравитационного поля (поверхности 3, 4, 5). Для сравнения количественных результатов практического и тестового примеров, плотность относимости в модели выбиралась в соответствии с тремя практически доступными вариантам (см. рис. 4). Из данных, представленных на рисунке 6 следует, что любое постоянное значение плотности относимости по сравнению с гидростатической плотностью нормальной модели приводит к завышению расчетных амплитуд аномалий гравитационного поля. Так, при вычислении избыточной плотности относительно мантийной $\sigma = \sigma_M = 3.4 \text{ г/см}^3$, переменная составляющая фона увеличивает амплитуду расчетных аномалий более, чем в два с половиной раза.

В модели литосферного пласта (см. рис. 5) перепад плотности по глубине меняется в достаточно широких пределах: $(2.0 \div 3.4) \text{ г/см}^3$. Такому диапазону переменных значений невозможно сопоставить одну постоянную средневзвешенную (или иную) плотность, адекватно описывающую гравитационные модели отдельных частей неоднородного слоя. Одномерная «гидростатическая» плотность $\sigma_0(z)$ дает более представительные поинтервальные оценки для избыточной плотности аномальных масс на разных глубинах.

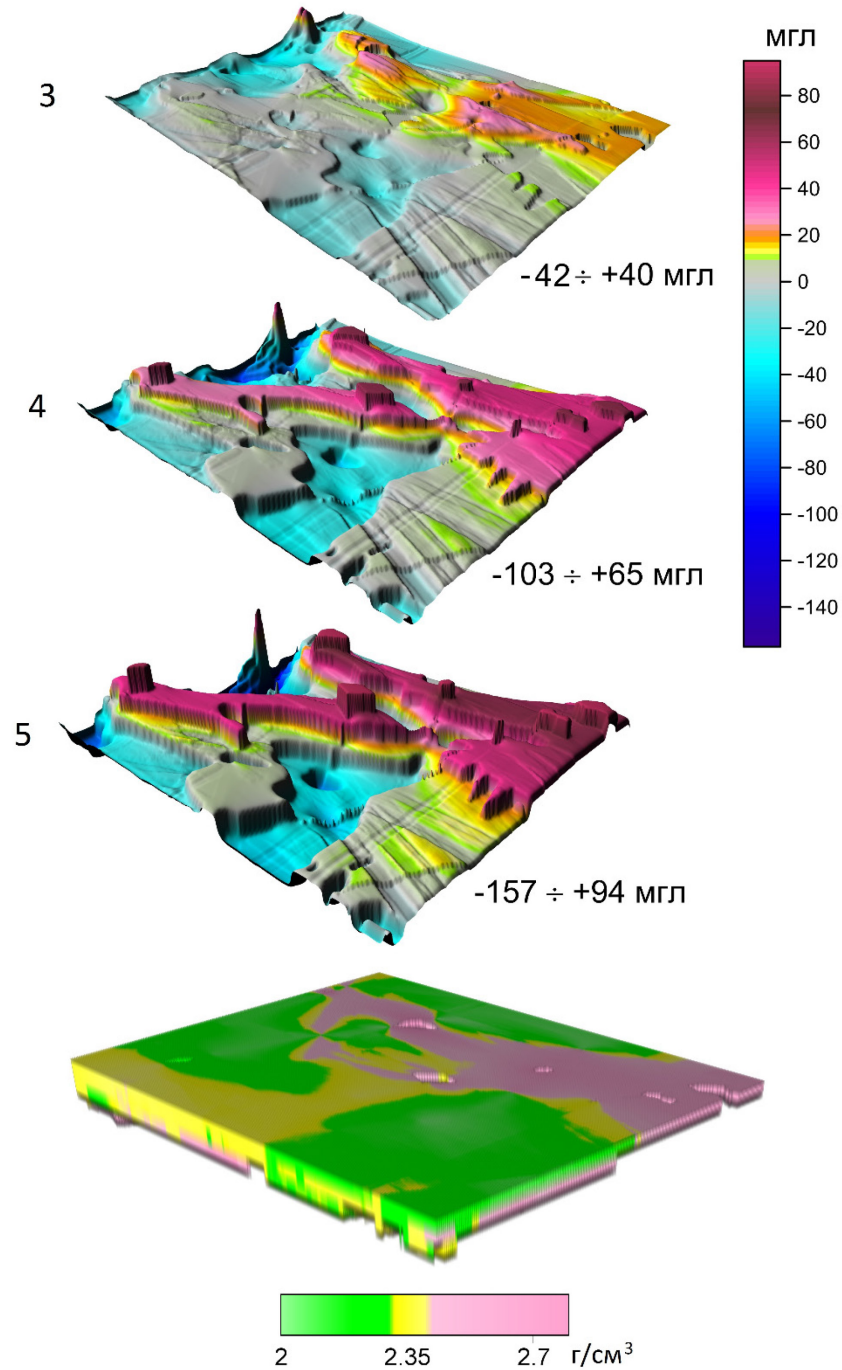


Рисунок 6. Плотностная модель осадочного чехла и графики вычисленных аномалий гравитационного поля для различных вариантов распределений избыточной плотности: аномалии (3) отнесены к одномерному распределению $\sigma_0(z)$ нормальной модели; аномалии (4) отнесены к постоянной средневзвешенной плотности $\sigma_{\text{ср}}=3.09 \text{ г/см}^3$; аномалии (5) отнесены к максимальной плотности мантийных блоков $\sigma=3.4 \text{ г/см}^3$; нумерация вариантов соответствует рисунку 4.

Разделение литосферного слоя на отдельные структурные комплексы предусматривает и соответствующее разделение полей гравитационной модели. Формула (15) дает возможность практической реализации схемы (14) задачи «геологического редуцирования» для переменной плотности криволинейных слоев. Чтобы исключить гравитационное влияние отдельного слоя, достаточно приравнять его трехмерную плотность к соответствующим интервальным значениям гидростатической плотности $\sigma_0(z)$ вмещающей среды. На рисунке 7 представлена плотностная модель, разделенная по кровле фундамента и верхней мантии на три неоднородных слоя с криволинейными границами. Здесь же приведены расчетные аномалии гравитационного поля от выделенных структурных комплексов.

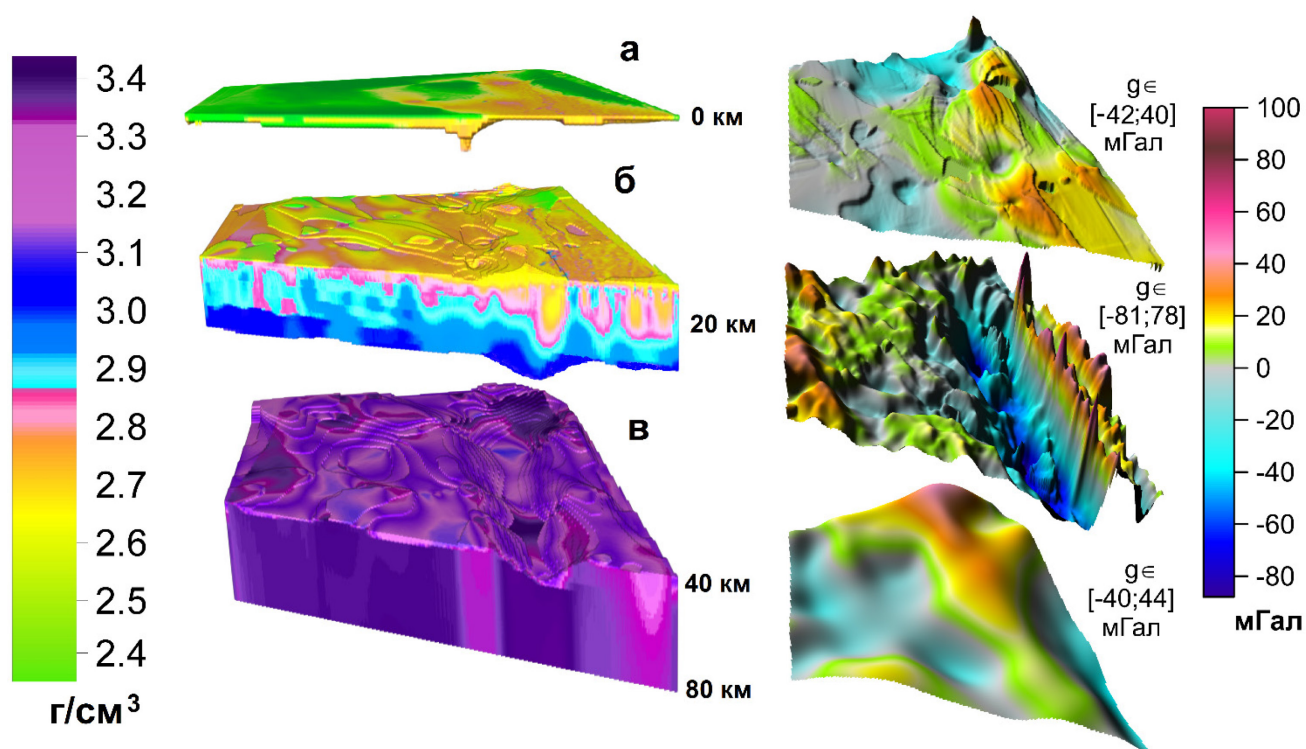


Рисунок 7. Трехмерная плотностная модель региона (слева), разделенная по поверхности кровли кристаллического фундамента и кровли верхней мантии: осадочный чехол (а), кристаллическая кора (б), верхняя мантия (в). Справа показаны аномалии поля, рассчитанные по избыточным плотностям, отнесенным к распределению гидростатической плотности $\sigma_0(z)$ нормальной модели.

Амплитуда рассчитанных аномалий пропорциональна скачку плотности на границах раздела «чехол-кора» и «кора-мантия». Переменная по глубине гидростатическая плотность $\sigma_0(z)$ минимизирует величину приграничного скачка плотности и, следовательно, уменьшает компенсационные составляющие поля от фрагментов неоднородного слоя на любой глубине.

2.4 Выводы по главе

Проблема, затронутая в текущей главе, касается обоснования способа вычисления и надлежащего учета гравитационного эффекта структурных (криволинейных) поверхностей, разделяющих слои с переменной плотностью. Эффект плотностной границы задается перепадом сопредельных плотностей выше- и нижележащих слоев. На внешних криволинейных границах обособленного слоя избыточная плотность вычисляется относительно модельного (выбранного интерпретатором) распределения «плотности вмещающей среды» [30]. Соответственно, в расчетном поле появится переменная «фоновая» составляющая, пропорциональная скачку плотности на внешних границах слоя. В таком случае не только морфология границ обрамления, но и априорно заданная плотность относимости «вмещающей среды» будут иметь решающее влияние на количественный результат расчета поля от отдельных слоев неоднородной плотностной модели. Корректное вычисление гравитационных аномалий от неоднородной плотностной модели и ее отдельных частей предопределяет обоснованность построения структурных схем районирования глубинных горизонтов и последующих выводов геологической интерпретации по комплексу геофизических полей.

В главе изложен метод выбора «плотности относимости» для трёхмерной модели геологической среды с переменной плотностью и вычисления аномального поля от неоднородных плотностных фрагментов. Показано, что выбор зависящей от глубины гидростатической плотности $\sigma_0(z)$ нормальной модели минимизирует влияние плотностного контакта на внешних границах криволинейного слоя. Это позволяет корректно разделить гравитационные эффекты от отдельных

фрагментов неоднородной плотностной модели и сопоставить аномалии разделенных полей по всей глубине расчетной области.

Возможности применения метода продемонстрированы на тестовом и практическом примерах. От структурных слоев плотностной модели литосферы Тимано-Печорской плиты, соответствующих осадочному чехлу, кристаллической земной коре и верхней мантии, вычислены аномалии поля в рамках модели неоднородного слоя с криволинейными границами.

3 Линейная обратная задача гравиметрии для модели слоистых сред (вычисление плотности по известным значениям поля).

Интерпретация геофизических полей является важным этапом при исследовании внутреннего строения Земли и решении задач разведочной геофизики. В главе на основе сеточных алгоритмов предложен метод интерпретации гравитационных аномалий (выделение плотностных неоднородностей): по аномалиям поля строится трехмерное распределение плотности в изучаемом объеме среды в формате сеточных функций. Процесс построения плотностных моделей сводится к решению линейной обратной задачи гравиметрии. Будем решать задачу в следующей постановке. Полагаем значения $g(\xi, \eta, \zeta)$ вертикальной компоненты гравитационного поля известными и заданными на некоторой горизонтальной плоскости $z = \zeta$, при этом $(\xi, \eta) \in [x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}]$. Считаем, что это поле создается преимущественно массами, расположенными в области $D = [x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}] \times [z_{min}, z_{max}]$, распределение плотности $\rho(x, y, z)$ в которой и требуется найти.

На практике g есть гравитационное поле в редукции Буге, разность максимума и минимума которого не превышает 0.3 Гал, ожидаемый физически корректный диапазон изменения плотности ρ с глубиной можно видеть, например, на рисунке 5, он составляет 2.2 – 3.5 г/см³ для глубины 0 – 80 км. При таком распределении плотности с глубиной для модели с латеральными размерами 1000×1000 км² поле в точке над ее геометрическим центром на поверхности будет составлять порядка 10 Гал и быстро убывать по мере удаления по латерали от центра: так, на «границе» над моделью оно будет иметь величину порядка 2.5 – 5 Гал. Как видим, есть несоответствие между порядками величин наблюдаемого поля g и модельного поля для физически корректных параметров плотности. Его можно «устранить» если положить, что наблюдаемое поле g обусловлено «аномальными» массами с плотностью $\rho - \sigma$, где σ – плотность относимости (см. пояснения к формулам 13 и 14), выбору которой была посвящена предыдущая глава. Можно считать, что σ – это плотность нормальной модели Земли (в границах D),

создающей нормальное поле силы тяжести, которое вычитается из фактически измеренного поля для получения аномалий силы тяжести. Далее в работе предполагаем, что в искомой плотности $\rho(x, y, z)$ уже учтена поправка за плотность относимости σ .

3.1 Итерационный процесс в общем виде

Плотность неоднородного параллелепипеда D будем искать в виде суммы плотности $\rho^{(0)}(x, y, z)$ модели начального приближения (считаем заданной) и произведения зависящей только от глубины функции $\rho_0(z)$ с функцией $\Phi(x, y)$ [29]:

$$\rho(x, y, z) = \rho^{(0)}(x, y, z) + \rho_0(z)\Phi(x, y).$$

При этом $\rho_0(z)$ считаем известной, скажем, исходя из данных каротажа по скважинам или из соответствующей зависимости для модели нулевого приближения. $\Phi(x, y)$ определяется из интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода:

$$\delta g^{(0)}(\xi, \eta, \zeta) = \gamma \int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} \Phi(x, y) K(x, y, \xi, \eta, \zeta) dx dy \quad (16)$$

$$K(x, y, \xi, \eta, \zeta) = \int_{z_{min}}^{z_{max}} \frac{(z - \zeta)\rho_0(z)}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2)^{3/2}} dz,$$

$$\delta g^{(0)}(\xi, \eta, \zeta) = g(\xi, \eta, \zeta) - U^{(0)}(\xi, \eta, \zeta)$$

где $U^{(0)}(\xi, \eta, \zeta) = \gamma \int_D \frac{(z - \zeta)\rho^{(0)}(x, y, z)}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2)^{3/2}} dx dy dz$ – поле модели нулевого приближения, γ – гравитационная постоянная.

Таким образом, задача вычисления корректирующей добавки к плотности модели начального приближения сводится к двумерному случаю. Это обеспечивает единственность решения уравнения для $\Phi(x, y)$ [42] и, как следствие, всей задачи на основе устойчивого алгоритма.

Численное решение обратной задачи гравиметрии в формате сеточных функций находится на основе идеи локализации [30, 35, 52]. Этот подход позволяет решать обратную задачу без нелинейной минимизации. В работе [37] для

уравнения (16) предложен соответствующий итерационный алгоритм для нахождения значений $\Phi(x, y)$, минимизирующей невязку $\|\delta g\|$ наблюдаемого $g(\xi, \eta, \zeta)$ и модельного $U(\xi, \eta, \zeta)$ полей. Воспроизведем его. Сначала считаем поле $U^{(0)}(\xi, \eta, \zeta)$ от модели начального приближения и «остаточное» поле $\delta g^{(0)} = g - U^{(0)}$, принимаем $\Phi^{(0)} \equiv 0$, $\zeta = const$, $\zeta \notin (z_{min}, z_{max})$, $(\xi, \eta) \in [x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}]$. Далее циклически повторяем следующие шаги (записано для итерации $\theta \geq 1$):

1) Вычисляем

$$\delta U^{(\theta)}(\xi, \eta) = \gamma \int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} \delta g^{(\theta-1)}(x, y, \zeta) K(x, y, \xi, \eta, \zeta) dx dy,$$

2) Считаем $\alpha^{(\theta)}$ и $\beta^{(\theta)}$:

$$\alpha^{(\theta)} = \frac{1}{Q^{(\theta)}} (\langle S, S \rangle \langle \delta g^{(\theta-1)}, \delta U^{(\theta)} \rangle - \langle S, \delta U^{(\theta)} \rangle \langle \delta g^{(\theta-1)}, S \rangle)$$

$$\beta^{(\theta)} = \frac{1}{Q^{(\theta)}} (\langle \delta U^{(\theta)}, \delta U^{(\theta)} \rangle \langle \delta g^{(\theta-1)}, S \rangle - \langle S, \delta U^{(\theta)} \rangle \langle \delta g^{(\theta-1)}, \delta U^{(\theta)} \rangle) \quad (17)$$

$$Q^{(\theta)} = \langle \delta U^{(\theta)}, \delta U^{(\theta)} \rangle \langle S, S \rangle - \langle S, \delta U^{(\theta)} \rangle^2,$$

где $\langle h_1, h_2 \rangle = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} h_1(x, y) h_2(x, y) dx dy$ – скалярное произведение в пространстве измеримых интегрируемых с квадратами на области $[x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}]$ вещественных функций; $S(\xi, \eta) = \gamma \int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} K(x, y, \xi, \eta, \zeta) dx dy$.

3) $\Phi^{(\theta)} = \Phi^{(\theta-1)} + \alpha^{(\theta)} \delta g^{(\theta-1)} + \beta^{(\theta)}$

Если мы ищем $\Phi^{(\theta)}$ в таком виде, то невязка поля на данной итерации запишется так: $\delta g^{(\theta)} = g - U^{(\theta)}$, где $U^{(\theta)} = \gamma \int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} \Phi^{(\theta)} K dx dy$ – поле модели на итерации θ . Т. е. $\delta g^{(\theta)} = g - \gamma \int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} (\Phi^{(\theta-1)} + \alpha^{(\theta)} \delta g^{(\theta-1)} + \beta^{(\theta)}) K dx dy = g - \gamma \int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} \Phi^{(\theta-1)} K dx dy - \gamma \alpha^{(\theta)} \int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} \delta g^{(\theta-1)} K dx dy - \gamma \beta^{(\theta)} \int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} K dx dy = g - U^{(\theta-1)} - \alpha^{(\theta)} \delta U^{(\theta)} - \beta^{(\theta)} S$. Таким образом, следующим шагом алгоритма считаем новую невязку $\delta g^{(\theta)}$ поля по невязке $\delta g^{(\theta-1)} = g - U^{(\theta-1)}$ на предыдущей итерации.

$$4) \quad \delta g^{(\theta)} = \delta g^{(\theta-1)} - \alpha^{(\theta)} \delta U^{(\theta)} - \beta^{(\theta)} S$$

5) Проверяем условие остановки итерационного процесса: $\|\delta g^{(\theta)}\| = \sqrt{\langle \delta g^{(\theta)}, \delta g^{(\theta)} \rangle} < \varepsilon$ (достижение требуемой точности ε подбора поля), если оно не выполнено – переходим к следующей итерации $\theta + 1$.

В итоге, после завершения цикла распределение плотности $\rho_0(z)\Phi^{(\theta)}(x, y)$ аппроксимирует (с точностью до константы, с нормой разности меньше ε) разницу $\delta g^{(0)}$ между наблюдаемым и полем модели нулевого приближения. Таким образом, прибавляя к модели нулевого приближения указанное распределение, получаем плотностную модель с полем, близким к наблюдаемому, с погрешностью $\|\delta g^{(\theta)}\|$.

Следует отметить, что $\alpha^{(\theta)}$ и $\beta^{(\theta)}$ выбраны так, чтобы минимизировать $\|\delta g^{(\theta)}\|^2 = \langle \delta g^{(\theta)}, \delta g^{(\theta)} \rangle = \langle \delta g^{(\theta-1)}, \delta g^{(\theta-1)} \rangle + (\alpha^{(\theta)})^2 \langle \delta U^{(\theta)}, \delta U^{(\theta)} \rangle + (\beta^{(\theta)})^2 \langle S, S \rangle + 2\alpha^{(\theta)}\beta^{(\theta)} \langle \delta U^{(\theta)}, S \rangle - 2\alpha^{(\theta)} \langle \delta g^{(\theta-1)}, \delta U^{(\theta)} \rangle - 2\beta^{(\theta)} \langle \delta g^{(\theta-1)}, S \rangle$.

Относительно $\alpha^{(\theta)}$ и $\beta^{(\theta)}$ выражение выше – положительно определенная квадратичная форма, которая имеет минимум в критической точке. Для ее нахождения берем частные производные по $\alpha^{(\theta)}$ и $\beta^{(\theta)}$ и приравниваем их к 0:

$$\begin{aligned} -\langle \delta g^{(\theta)}, \delta U^{(\theta)} \rangle &= \alpha^{(\theta)} \langle \delta U^{(\theta)}, \delta U^{(\theta)} \rangle + \beta^{(\theta)} \langle \delta U^{(\theta)}, S \rangle - \langle \delta g^{(\theta-1)}, \delta U^{(\theta)} \rangle = 0 \\ -\langle \delta g^{(\theta)}, S \rangle &= \alpha^{(\theta)} \langle \delta U^{(\theta)}, S \rangle + \beta^{(\theta)} \langle S, S \rangle - \langle \delta g^{(\theta-1)}, S \rangle = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Решением данной системы уравнений будут являться $\alpha^{(\theta)}$ и $\beta^{(\theta)}$, вычисляемые по формулам (17).

Физические размерности участвующих в алгоритме величин следующие: $[g] = [\delta g] = [U] = \text{мГал}$, $[\rho] = [\rho_0][\Phi] = \text{г/см}^3$. При этом можно считать, что $[\rho_0] = \text{г/см}^3$, а $[\Phi] = 1$ (т.е. это величина безразмерная, просто латерально модифицирующая функция к распределению плотности по глубине), в таком случае $[\delta U] = (\text{мГал})^2$, $[S] = \text{мГал}$, $[\alpha] = (\text{мГал})^{-1}$, $[\beta] = 1$.

3.2 Дискретизация итерационного процесса

На разбиении $\{x_i, y_j, z_k\}$ (см. пояснения к формулам 1-3) области интегрирования D построим сеточный аналог (2) мультипликативной плотности $\rho_{i,j}^k$: $\rho_0(z) = \rho_0^k$, $z \in [z_k; z_{k+1})$; $\Phi(x, y) = \Phi_{i,j}$, $(x, y) \in [x_i; x_{i+1}) \times [y_j; y_{j+1})$, $i \in$

$\overline{0, N_x - 1}$, $j \in \overline{0, N_y - 1}$, $k \in \overline{0, N_z - 1}$. Поле $U(\xi, \eta, \zeta)$ на высоте $\zeta = const$ от параллелепипеда D рассчитаем на горизонтальной сетке в точках \vec{t} (см. обозначения к 10). На основании (4) имеем:

$$U(\xi_{i_1}, \eta_{j_1}, \zeta) = U_{i_1, j_1} = \gamma \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} \Phi_{i,j} \sum_{k=0}^{N_z} \Delta \rho_0^k S_{i_1, j_1, i, j}^k, \quad (19)$$

где $\Delta \rho_0^k$ – разность нормальных плотностей k и $k-1$ горизонтальных слоев: $\Delta \rho_0^k = \rho_0^k - \rho_0^{k-1}$, $k \in \overline{1, N_z - 1}$ и $\Delta \rho_0^0 = \rho_0^0$, $\Delta \rho_0^{N_z} = -\rho_0^{N_z-1}$, $S_{i_1, j_1, i, j}^k = S_{i,j}^k(\xi_{i_1}, \eta_{j_1}, \zeta)$.

Для уменьшения числа индексов в последующих выкладках введем сплошную индексацию вертикальных столбцов плотностного параллелепипеда: $n = i + jN_x$, $n \in \overline{0, N_x N_y - 1}$ и точек \vec{t} : $m = i_1 + M_x j_1$, $m \in \overline{0, M - 1}$, $M = M_x M_y$. В этих обозначениях $\Phi_{i,j} \equiv \Phi_n$, $S_{i_1, j_1, i, j}^k \equiv S_{m,n}^k$, $U_{i_1, j_1} \equiv U_m$. Если при этом $\xi_0 \in (x_0, x_1)$, $\eta_0 \in (y_0, y_1)$, $N_x = M_x$, $N_y = M_y$, то над (или под) каждым плотностным столбцом с индексом n находится только одна точка вычисления поля, ее индекс $m = n$ (более того, $i_1 = i$, $j_1 = j$). Далее считаем эти условия выполненными.

Наблюдаемое гравитационное поле g на высоте ζ (или его трансформанты) считаем заданным в точках \vec{t} :

$$g(\xi_{i_1}, \eta_{j_1}, \zeta) = g_m$$

Дискретизация (19) интегрального оператора S прямой задачи приводит к СЛАУ:

$$\gamma \sum_{n=0}^{M-1} \Phi_n \sum_{k=0}^{N_z} S_{m,n}^k \Delta \rho_0^k = g_m \quad (20)$$

Здесь $S_{m,n}^k$ – трехмерный тензор интегрирования; $\Delta \rho_0^k$ – приращение плотности по глубине; Φ_n – неизвестное латеральное изменение плотности.

В уравнении (20) коэффициентами при неизвестных Φ_n являются заранее определенные величины – внутренние суммы по k в правой части формулы (19). По физическому смыслу – это значения поля в точках \vec{t} вертикальных столбов D_n , набранных из элементов D_n^k с плотностями ρ_0^k :

$$S_{m,n} = \gamma \sum_{k=0}^{N_z} S_{m,n}^k \Delta \rho_0^k \quad (21)$$

Задача о нахождении плотности в слое сводится к решению СЛАУ $S_{m,n} \Phi_n = g_m$. Матрица $S_{m,n}$ образована сверткой (21) тензора интегрирования с вектором приращения одномерной плотности и вычисляется только один раз. Соответственно, для любого вектора неизвестных Φ_n вычисление значений U_m поля от трехмерного параллелепипеда сводится к элементарной, казалось бы, операции умножения матрицы на вектор:

$$U_m = \sum_{n=0}^{M-1} S_{m,n} \Phi_n \quad (22)$$

Подвох в том, что матрица $S_{m,n}$ имеет большую размерность: $M_x M_y \times N_x N_y$, и в ней вообще нет нулевых элементов. Так, для решения прямой задачи от модели с разбиением средней детальности по x и y 256×256 в таком же количестве точек счета поля, потребовалась бы матрица $S_{m,n}$ из 65536×65536 элементов, которая занимала бы в памяти 32 Гб (в числах с двойной точностью). Для модели с латеральным разбиением 1024×1024 занимаемый $S_{m,n}$ объем составлял бы уже 8 Тб. Способ решения этой проблемы, при котором матрица не хранится в памяти, но все ее элементы вычисляются по мере надобности «на месте», эквивалентен использованию формулы (10) и требует слишком много времени. Вывод «быстрой» формулы (12) отражает тот факт, что при выбранных разбиении модели D и сетке точек счета поля матрица $S_{m,n}$ содержит большое количество повторяющихся элементов. Различных элементов в ней в таком случае не более $(N_x + M_x)(N_y + M_y)$, но они некоторым образом «перемешаны». В простейшем случае, при $x_0 - \xi_0 = \frac{\Delta x}{2}$, $y_0 - \eta_0 = \frac{\Delta y}{2}$, $N_x = M_x$, $N_y = M_y$, все неповторяющиеся элементы $S_{m,n}$ содержатся в нескольких последовательных строках, остальные строки получаются из них частичными циклическими сдвигами. Этот случай подробно разобран в [76].

В работе [35] предложен дискретный устойчивый итерационный алгоритм решения СЛАУ (20) линейной обратной задачи, опирающийся на идеи метода

локальной минимизации [30]. В этом методе используется локально-одномерная модель распределения плотности: на каждой итерации приращение поля от вертикального столба D_n вычисляется только для эпицентральной точки сетки $m = n$ [29, 30]. Это означает, что из всей суммы (22) для поля U_m учитывается лишь одно слагаемое $\Phi_m S_{m,m}$.

Обозначим через $\delta g_m^{(\theta)}$ разность подбираемого (g_m) и модельного ($U_m^{(\theta)}$) полей в точке \vec{q}_m после итерации θ :

$$\delta g_m^{(\theta)} = g_m - U_m^{(\theta)} = g_m - \sum_{n=0}^{M-1} S_{m,n} \Phi_n^{(\theta)},$$

где $\Phi_n^{(\theta)}$ – значение Φ для n -ого столба модели после итерации θ . $\delta g_m^{(0)}$ есть разность в точке \vec{q}_m наблюдаемого поля и поля начальной модели. В основе предлагаемого алгоритма лежит последовательное уменьшение величины невыбранного поля δg независимо в каждой точке сетки за счет изменения Φ для вертикального плотностного столба под этой точкой. Если бы поле в точке \vec{q}_m было обусловлено только массами ближайшего столбца D_m и не зависело от остальных, то Φ_m определялось бы из отношения $g_m/S_{m,m}$. Хотя условие не верно, но D_m вносит больший вклад в поле в точке \vec{q}_m , чем любой другой столбец (при равных плотностях). Поэтому в первом приближении величину $\delta \Phi_m^{(\theta)} = \delta g_m^{(\theta-1)}/S_{m,m}$ имеет смысл принять за поправку к Φ_m на итерации θ , которая дополнит модельное поле до наблюдаемого, аппроксимируя оставшееся после предыдущей итерации. Добавление в каждой точке к $\Phi_m^{(\theta-1)}$ значений $\delta \Phi_m^{(\theta)}$ изменяет модельное поле на величину $\delta U_m^{(\theta)} = U_m^{(\theta)} - U_m^{(\theta-1)} = \sum_{n=0}^{M-1} \frac{S_{m,n}}{S_{n,n}} \delta g_n^{(\theta-1)} = \delta \hat{U}_m^{(\theta)}$. Множество

$(\delta \hat{U}_m^{(\theta)})_{m=0}^{M-1}$ лучше вычислять не по формуле (22), а, как было указано выше, при помощи быстрого алгоритма по формуле (12). Таким образом, после итерации θ : $\Phi_m^{(\theta)} = \Phi_m^{(\theta-1)} + \delta \Phi_m^{(\theta)}$, $\delta g_m^{(\theta)} = \delta g_m^{(\theta-1)} - \delta U_m^{(\theta)}$. Остановиться следует по

достижении требуемой точности ε подбора поля: при условии $\|\delta g^{(\theta)}\| = \sqrt{\sum_{m=0}^{M-1} (\delta g_m^{(\theta)})^2} < \varepsilon$.

Однако, построенная таким образом итерационная схема в большинстве случаев будет расходящейся ($\|\delta g^{(\theta)}\|$ будет только увеличиваться). Причина в том, что при прочих равных условиях вклад D_m в модельное поле в точке \vec{q}_m может быть меньше вклада всех остальных столбцов $D \setminus D_m$. Тем меньше, чем меньше площадь $\Delta x \Delta y$ ячейки сетки разбиения модели в плоскости Oxy , т.к. $\lim_{\Delta x \Delta y \rightarrow 0} \|U(D_m)\| = 0$, а $\|U(D)\|$ не зависит от $\Delta x \Delta y$. Мы же, полагая $\delta \Phi_m^{(\theta)} = \delta g_m^{(\theta-1)} / S_{m,m}$, относим всю величину поля $\delta g_m^{(\theta-1)}$ к столбцу D_m , тем самым на каждой итерации завышая поправку к латеральной плотности: $\lim_{\Delta x \Delta y \rightarrow 0} |\delta \Phi_m^{(\theta)}| = \infty$. Чтобы этого не происходило, на каждой итерации примем $\delta \Phi_m^{(\theta)} = \alpha^{(\theta)} \frac{\delta g_m^{(\theta-1)}}{S_{m,m}} + \beta^{(\theta)}$, где $\alpha^{(\theta)}$ и $\beta^{(\theta)}$ – некоторые коэффициенты, общие для всех столбцов $\{D_m\}_{m=0}^{M-1}$. Невязка поля в каждой точке в таком случае будет равна

$$\delta g_m^{(\theta)} = \delta g_m^{(\theta-1)} - \alpha^{(\theta)} \delta \hat{U}_m^{(\theta)} - \beta^{(\theta)} S_m, \quad (23)$$

где $S_m = \sum_{n=0}^{M-1} S_{m,n}$ – поле от всего параллелепипеда D при $\Phi(x, y) \equiv 1$ в точке \vec{q}_m . $\alpha^{(\theta)}$ и $\beta^{(\theta)}$ выберем исходя из условия минимума $\|\delta g^{(\theta)}\|$:

$$\begin{aligned} \alpha^{(\theta)} &= \frac{1}{Q^{(\theta)}} \left(\sum_{m=0}^{M-1} (S_m)^2 \sum_{m=0}^{M-1} \delta g_m^{(\theta-1)} \delta \hat{U}_m^{(\theta)} - \sum_{m=0}^{M-1} S_m \delta \hat{U}_m^{(\theta)} \sum_{m=0}^{M-1} S_m \delta g_m^{(\theta-1)} \right) \\ \beta^{(\theta)} &= \frac{1}{Q^{(\theta)}} \left(\sum_{m=0}^{M-1} (\delta \hat{U}_m^{(\theta)})^2 \sum_{m=0}^{M-1} S_m \delta g_m^{(\theta-1)} - \sum_{m=0}^{M-1} S_m \delta \hat{U}_m^{(\theta)} \sum_{m=0}^{M-1} \delta g_m^{(\theta-1)} \delta \hat{U}_m^{(\theta)} \right) \\ Q^{(\theta)} &= \sum_{m=0}^{M-1} (S_m)^2 \sum_{m=0}^{M-1} (\delta \hat{U}_m^{(\theta)})^2 - \left(\sum_{m=0}^{M-1} S_m \delta \hat{U}_m^{(\theta)} \right)^2 \end{aligned} \quad (24)$$

Резюмируя, запишем основные этапы итерационного алгоритма для нахождения значений $\{\Phi_m\}_{m=0}^{M-1}$, минимизирующих невязку наблюдаемого и модельного полей $\|\delta g\|$. Сначала считаем поле $U_m^{(0)}$ от модели нулевого

приближения и «остаточное» поле $\delta g_m^{(0)} = g_m - U_m^{(0)}$, принимаем $\Phi_m^{(0)} = 0$. Далее циклически повторяем следующие шаги (записано для итерации $\theta \geq 1$):

- 1) Вычисляем $\delta \hat{U}_m^{(\theta)} = \sum_{n=0}^{M-1} \frac{S_{m,n}}{S_{n,n}} \delta g_n^{(\theta-1)}$, то есть поле от модели, в которой $\Phi_m = \delta g_m^{(\theta-1)} / S_{m,m}$.
- 2) По формулам (24) считаем $\alpha^{(\theta)}$ и $\beta^{(\theta)}$.
- 3) Считаем $\Phi_m^{(\theta)} = \Phi_m^{(\theta-1)} + \alpha^{(\theta)} \frac{\delta g_m^{(\theta-1)}}{S_{m,m}} + \beta^{(\theta)}$.
- 4) По формуле (23) считаем $\delta g_m^{(\theta)}$.
- 5) Проверяем условие остановки итерационного процесса: $\|\delta g^{(\theta)}\| = \sqrt{\sum_{m=0}^{M-1} (\delta g_m^{(\theta)})^2} < \varepsilon$ (достижение требуемой точности ε подбора поля); если условие не выполнено – переходим к следующей итерации $\theta + 1$.

В итоге, после завершения цикла распределение плотности $\rho(x, y, z) = \rho_0^k \Phi_{i,j}^{(\theta)}$, $(x, y, z) \in [x_i; x_{i+1}) \times [y_j; y_{j+1}) \times [z_k; z_{k+1})$, $i \in \overline{0, N_x - 1}$, $j \in \overline{0, N_y - 1}$, $k \in \overline{0, N_z - 1}$ аппроксимирует (с точностью до константы) разницу $\delta g^{(0)}$ между наблюдаемым полем и полем модели нулевого приближения. Таким образом, прибавляя к модели нулевого приближения указанное распределение, получаем плотностную модель с полем, близким к наблюдаемому, с погрешностью $\|\delta g^{(\theta)}\|$.

3.3 Тестирование алгоритма решения линейной обратной задачи на синтетических и практических примерах

Для оценки работоспособности итерационного алгоритма решения линейной обратной задачи гравиметрии рассмотрим модельный пример неоднородного распределения плотности [97]. Область D представляет собой параллелепипед $D = 50 \times 50 \times 10 \text{ км}^3$, заполненный двумя плотностными включениями (Рис. 8): центрированной приповерхностной вставкой $D_1 = 20 \times 20 \times 2 \text{ км}^3$ с плотностью $\rho_1 = -1.0 \text{ г/см}^3$ и такой же, но более глубокозалегающей вставкой D_2 с плотностью $\rho_2 = 2.0 \text{ г/см}^3$. Верхняя кромка D_1 расположена на глубине 2 км от уровня дневной поверхности; верхняя кромка D_2 – на глубине 6 км. Сетку

разбиения модели и точек вычисления поля выберем так, чтобы $N_x = N_y = N_z = M_x = M_y = 50$, $x_0 - \xi_0 = \frac{\Delta x}{2}$, $y_0 - \eta_0 = \frac{\Delta y}{2}$, $\Delta x = \Delta y = 1$ км, $\Delta z = 0.2$ км. Вычислим поле модели (относительно $\sigma_0(z)$) и приведем его к нулевому среднему значению, будем считать полученные значения «наблюденным» полем g_m . Распределение по глубине средней плотности $\sigma_0(z)$ модели D представлено на рисунке 9, его мы считаем известным и принимаем в качестве $\rho_0(z)$.

На рисунке 10 представлены результаты решения линейной обратной задачи (определения плотности по заданному полю). В варианте «а» использована априорная информация о распределении плотности с глубиной в исходной модели (рис. 9); в варианте «б» $\rho_0(z) \equiv 1$. Оба варианта полученных решений удовлетворяют заданному полю g_m с относительной погрешностью подбора менее 1% и устойчивы относительно его вариаций. Для 12 итераций время счета на GPU NVidia Titan Black задачи на сетке поля 50×50 составило не более 5-ти секунд.

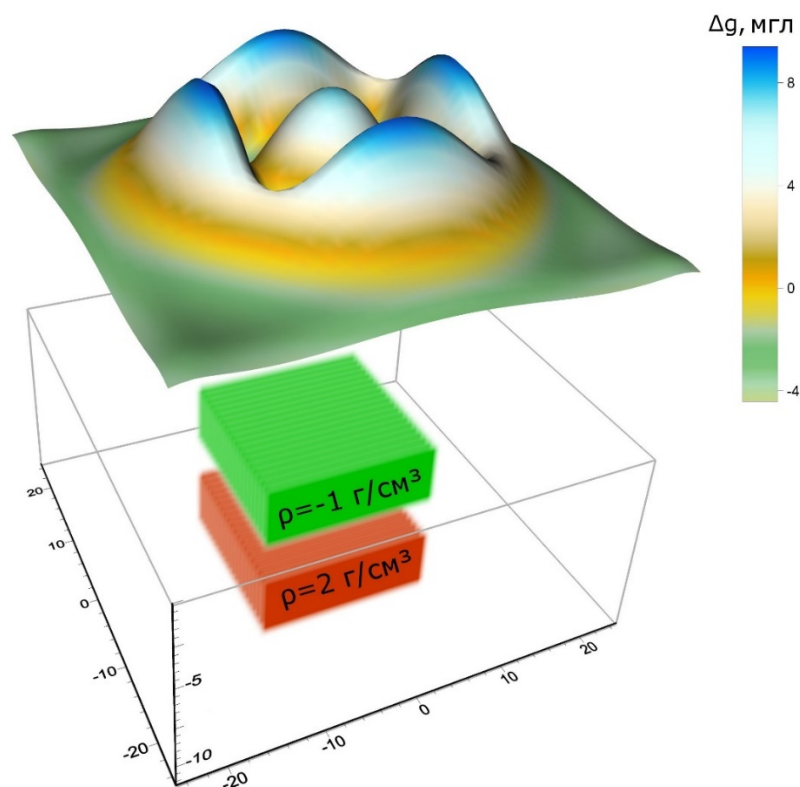


Рисунок 8. Прямая задача гравиметрии для неоднородного плотностного параллелепипеда: модель распределения трехмерной плотности $\rho(x, y, z)$ и расчетное модельное поле, приведенное к нулевому среднему.

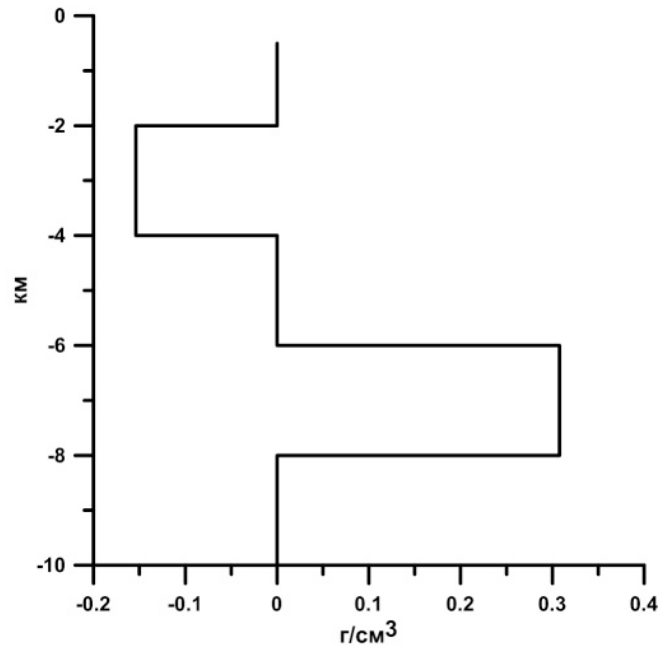


Рисунок 9. Изменение с глубиной средней плотности $\sigma_0(z)$ исходной модели.

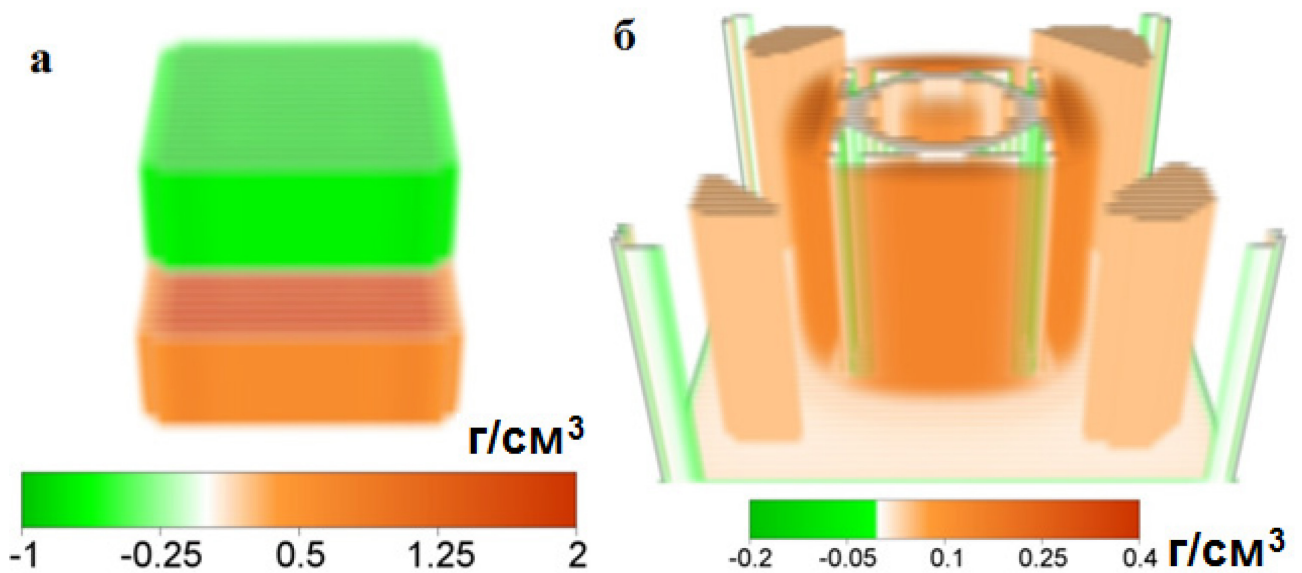


Рисунок 10. Решение линейной обратной задачи: а) с учетом зависимости $\rho_0(z) = \sigma_0(z)$, б) при $\rho_0(z) \equiv 1$.

Решение, изображенное на рисунке 10а, хорошо согласуется с исходной моделью трехмерного распределения плотности (рис. 8). Погрешность восстановления плотности приповерхностной вставки D_1 составляет 10%; нижележащей вставки D_2 – 15%. Решение на рисунке 10б является абсолютно неприемлемым: восстановленная плотность почти на порядок отличается от

исходной модели и принимает положительные и отрицательные компенсирующие значения на всех глубинах.

Покажем далее, как меняется решение при выборе различных вариантов $\rho_0(z)$. В каждом случае невязка модельного и наблюдаемого полей составила менее 1%. На рисунке 11 представлен вариант $\rho_0(z)$, соответствующий средней плотности $\sigma_0(z)$ модели D , но с удаленной нижней частью. Результат решения обратной задачи в этом случае состоит только из одного объекта. Его геометрические размеры, в общем, близки к размерам верхнего параллелепипеда D_1 , но распределение плотности непостоянно и включает как положительные, так и отрицательные значения в интервале $(-1; 0,5)$ г/см³.

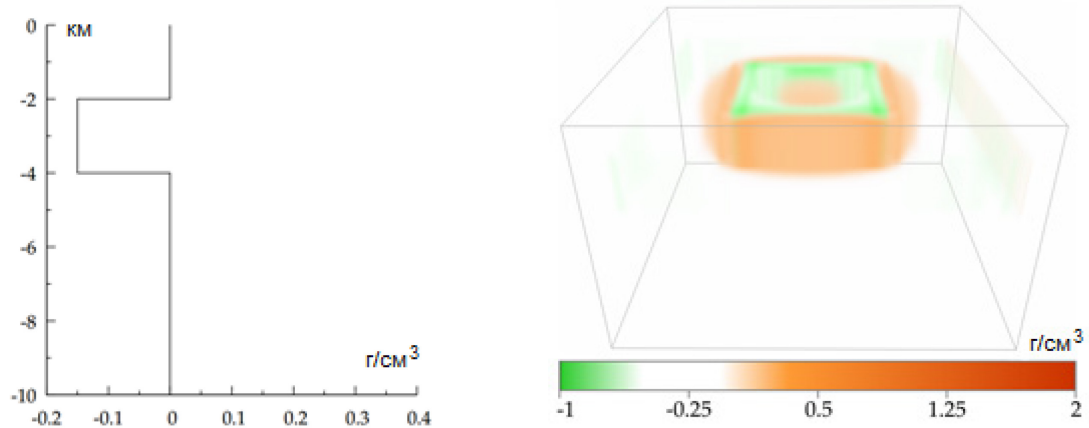


Рисунок 11. Синтетический пример модификация 1. Слева: $\rho_0(z)$; справа: решение линейной обратной задачи.

На рисунке 12 представлен вариант $\rho_0(z)$, соответствующий средней плотности $\sigma_0(z)$ модели D , но с удаленной верхней частью. Результат решения обратной задачи в этом случае также состоит только из одного объекта, но с латеральными размерами большими, чем D_2 . Распределение плотности представляет из себя «высокочастотное» чередование положительных и отрицательных значений большой амплитуды из интервала $(-56,8; 34,1)$ г/см³. Рядом расположенные массы взаимно компенсируют друг друга, и модельное поле в итоге очень близко к наблюдаемому. Чем больше будет глубина, на которой мы

станем подбирать плотности, тем больше будет «частота» компенсаций и их амплитуда. Разумеется, такое решение никакого физического смысла не имеет.

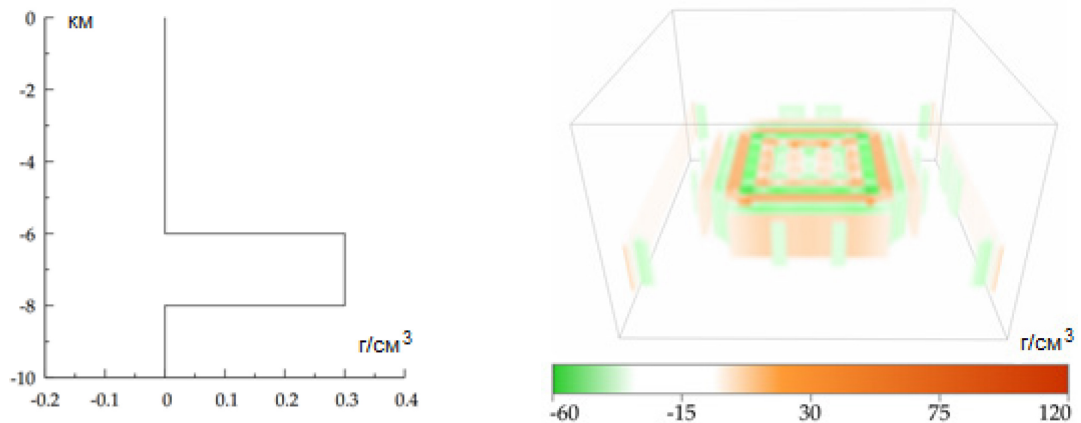


Рисунок 12. Синтетический пример модификация 2. Слева: $\rho_0(z)$; справа: решение линейной обратной задачи.

На рисунке 13 представлен вариант $\rho_0(z)$, соответствующий средней плотности $\sigma_0(z)$ модели D , но с удаленным промежутком между параллелепипедами D_1 и D_2 . В результате решения обратной задачи мы получили два близко расположенных объекта, но с отличающимися от исходной модели D плотностями: завышенной в нижней части и в два раза меньшей в верхней. Также появились компенсирующие «углы». Интервал вариации плотности: $(-2, 1; 2, 2)$ г/см³.

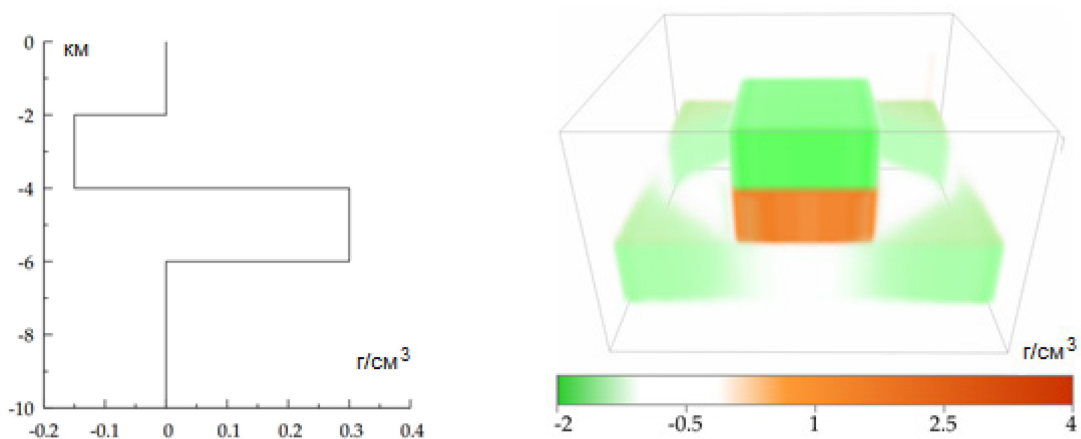


Рисунок 13. Синтетический пример модификация 3. Слева: $\rho_0(z)$; справа: решение линейной обратной задачи.

Последний синтетический пример на рисунке 14 демонстрирует, что произойдет, если мы возьмем в качестве $\rho_0(z)$ среднюю плотность $\sigma_0(z)$ модели D , но опустим ее на 5 км вниз. Результат качественно похож на второй вариант с рисунка 12: «высокочастотные» компенсации с большой амплитудой. Интервал вариации плотности: $(-50,3; 79,5)$ г/см³.

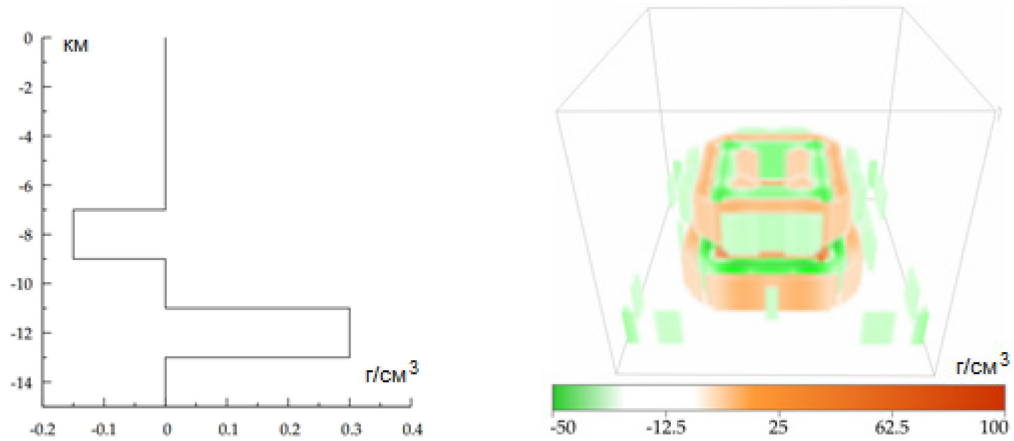


Рисунок 14. Синтетический пример модификация 4. Слева: $\rho_0(z)$; справа: решение линейной обратной задачи.

Таким образом, выбор $\rho_0(z)$, отвечающей за распределение масс по глубине, существенно влияет на стабильность решения линейной обратной задачи предложенным методом. Неправильный выбор $\rho_0(z)$ может привести к резкому увеличению амплитуды подобранного распределения плотности и его «компенсационному» виду. Несмотря на это, модельное поле будет с произвольной точностью соответствовать наблюдаемому. Такое поведение решения есть следствие некорректности постановки линейной обратной задачи. Именно поэтому процесс гравитационного моделирования следует предварять выбором разумных ограничений на распределение плотности, которые помогут стабилизировать решение и сохранить геологическую содержательность модели. Выбор $\rho_0(z)$ есть один из вариантов таких ограничений.

Продемонстрируем работу алгоритма на практическом примере построения модели распределения плотности для территории $60^\circ - 68^\circ$ с. ш., $48^\circ - 72^\circ$ в. д. до глубины 80 км. На рисунке 15 для данной территории представлена карта аномалий

гравитационного поля в редукции Буге. В качестве начального приближения возьмем 3D модель (рис. 16), построенную в ИГФ УрО РАН при участии Автора [25] на основе обработки данных с десяти сейсмических профилей ГСЗ, МОВЗ. На рисунках 17 и 18 показаны, соответственно, поле модели начального приближения, посчитанное на высоте 0 км – «дневной поверхности», и разность с ним наблюдаемого поля. Каким образом средняя плотность $\sigma_0(z)$ начальной модели изменяется с глубиной, можно видеть на рисунке 19.

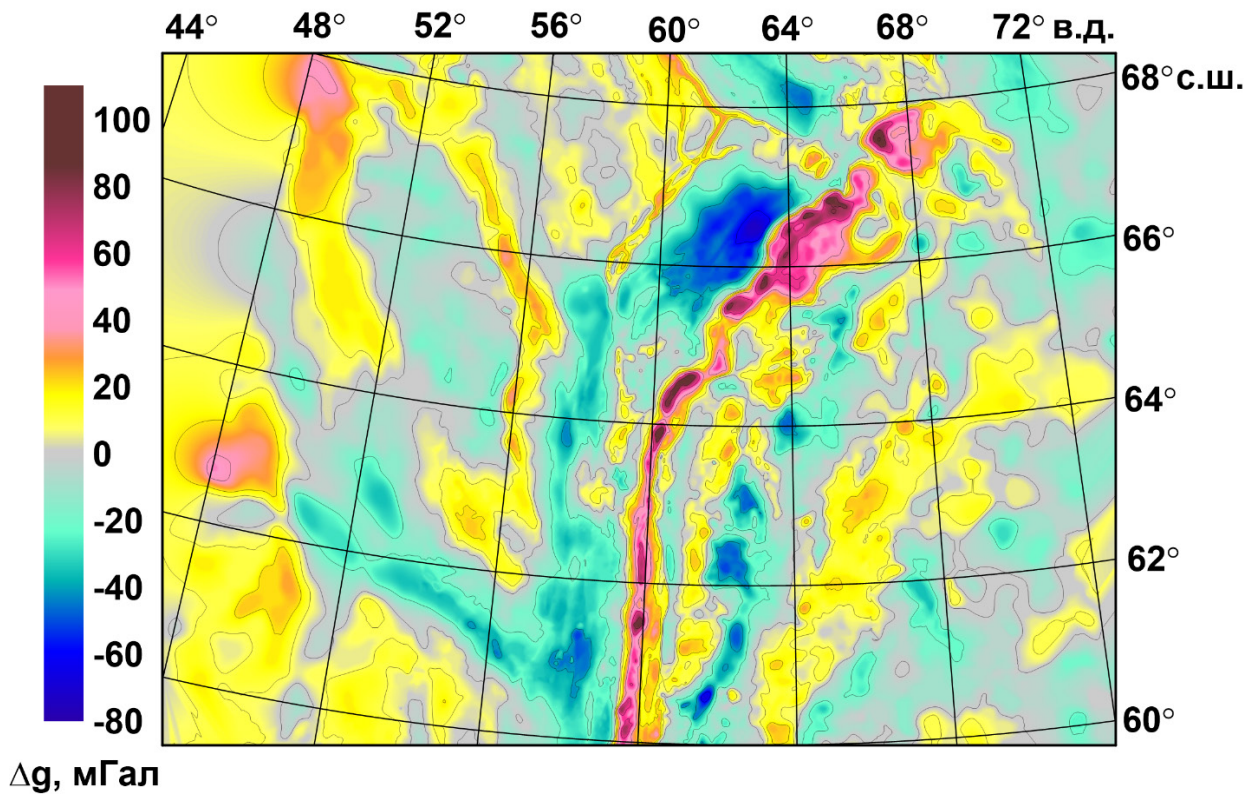


Рисунок 15. Аномалии вертикальной компоненты гравитационного поля в редукции Буге для территории 60° – 68° с. ш., 48° – 72° в. д..

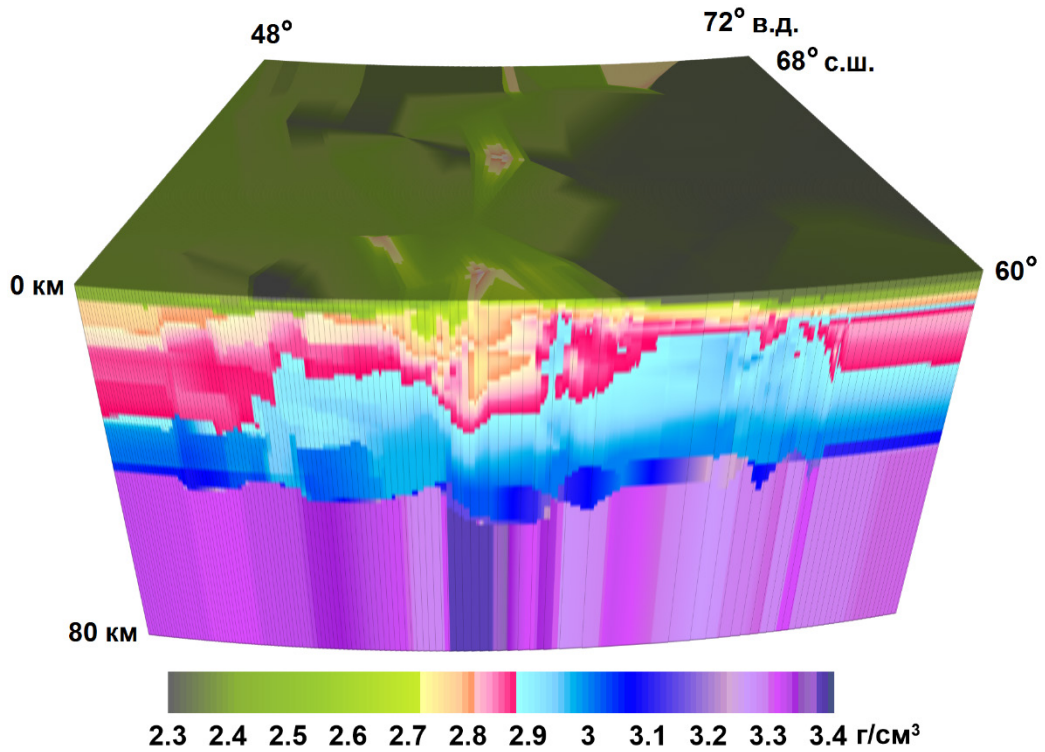


Рисунок 16. Плотностная модель начального приближения для территории 60° – 68° с. ш., 48° – 72° в. д..

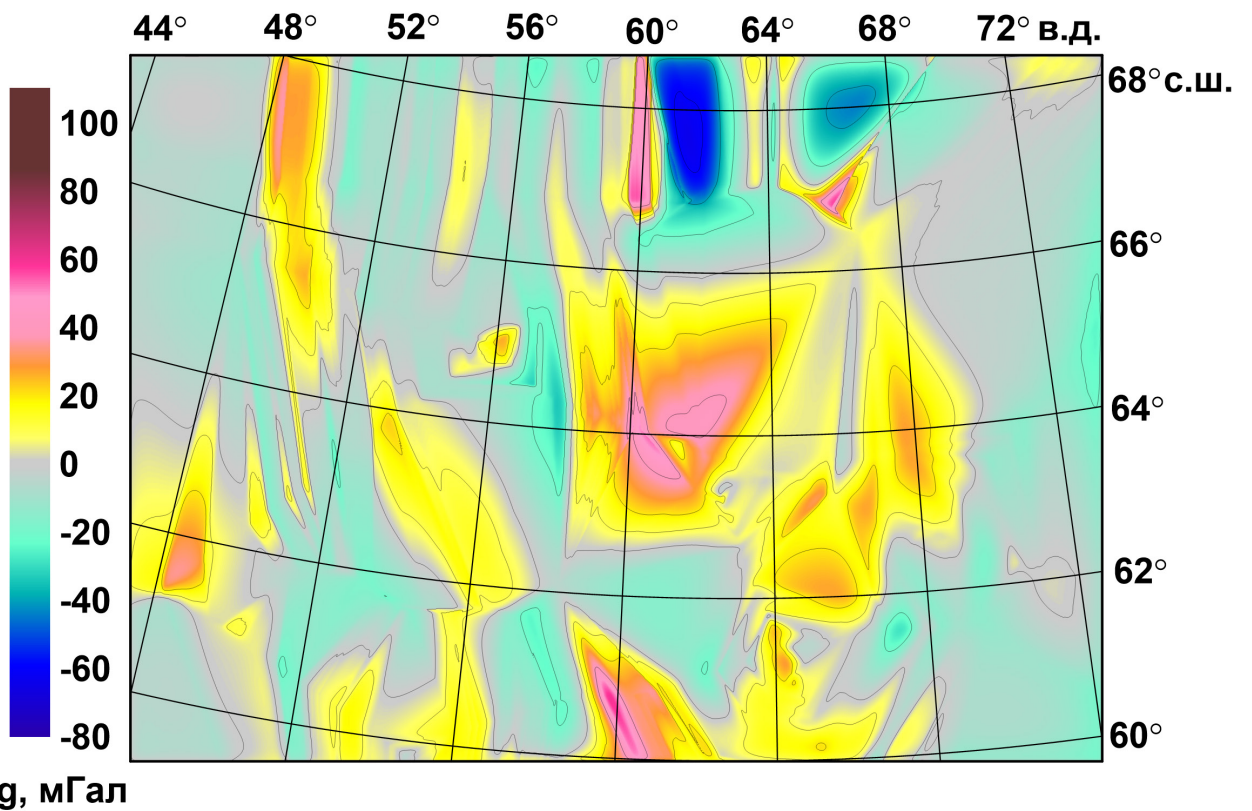


Рисунок 17. Поле, вычисленное от плотностной модели начального приближения для территории 60° – 68° с. ш., 48° – 72° в. д..

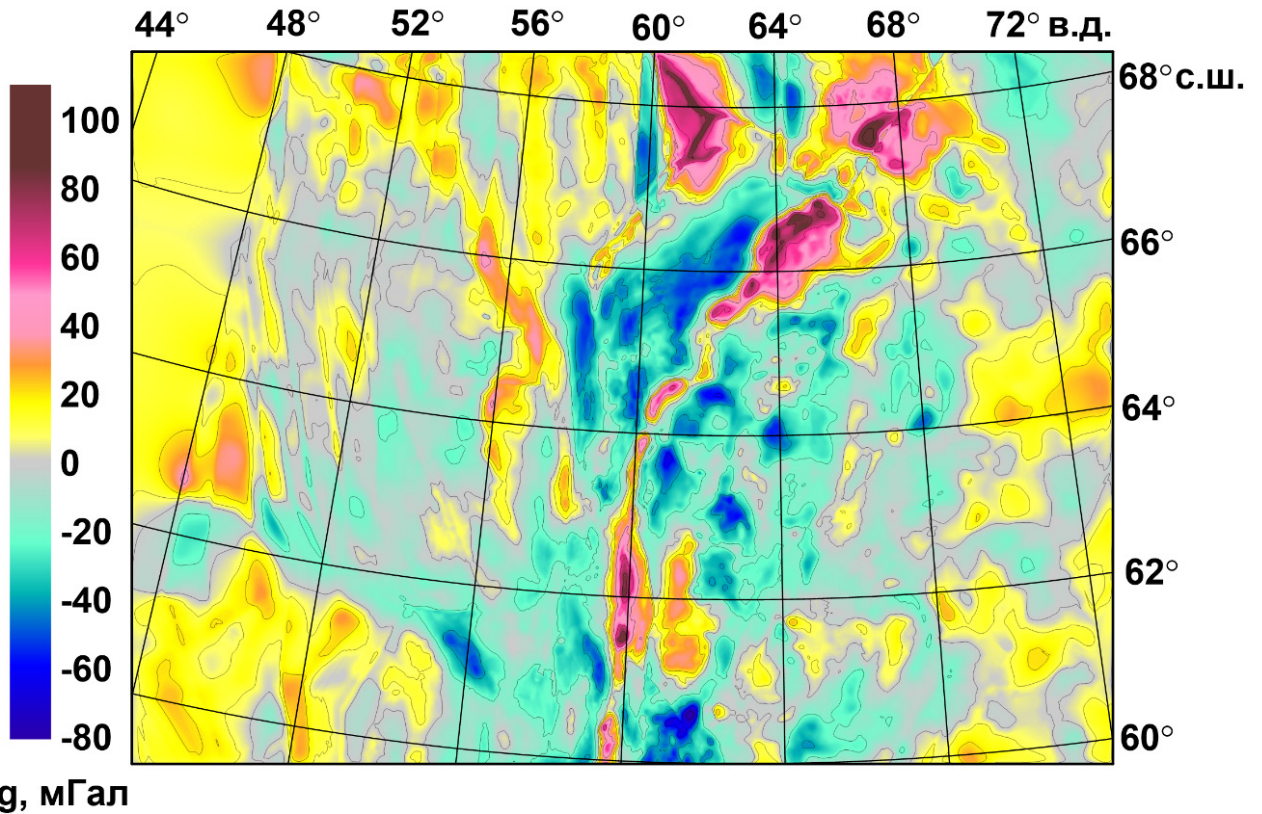


Рисунок 18. Разность наблюдаемого поля и поля модели начального приближения для территории $60^\circ - 68^\circ$ с. ш., $48^\circ - 72^\circ$ в. д..

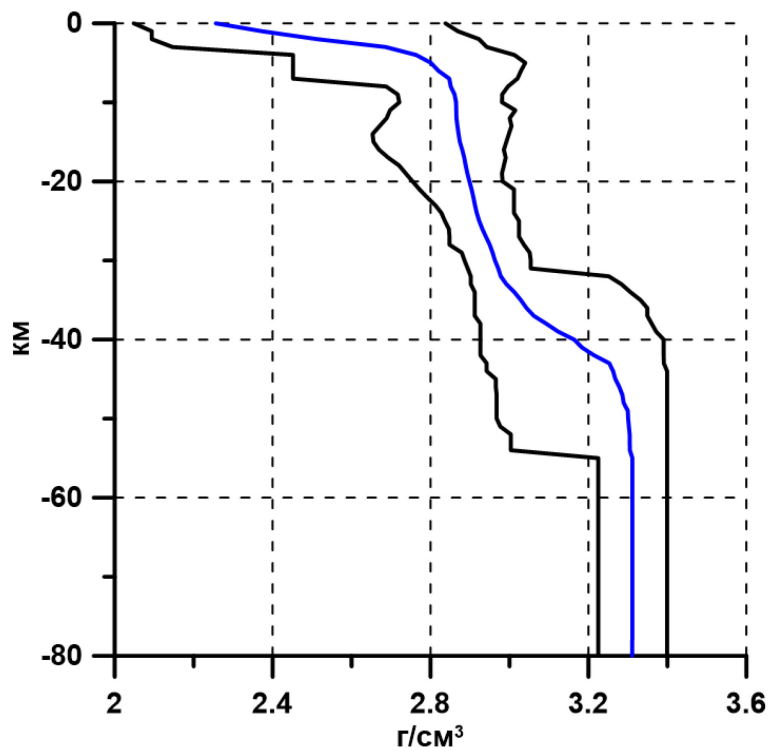


Рисунок 19. Изменение с глубиной средней плотности $\sigma_0(z)$ модели начального приближения для территории $60^\circ - 68^\circ$ с. ш., $48^\circ - 72^\circ$ в. д.. Также приведены графики минимальной и максимальной плотности для интервала глубин.

При помощи программной реализации приведенного выше алгоритма была построена плотностная модель (см. рис. 20), удовлетворяющая наблюдаемому полю с погрешностью 0.5%. Линейная обратная задача решалась для интервала глубин (-80; 0) км, $\rho_0(z)$ принималась равной $\sigma_0(z)$. Как видно из рисунка 20, получившаяся модель, несмотря на то что удовлетворяет наблюдаемому полю и имеет практически не изменившийся по сравнению с моделью начального приближения диапазон вариаций плотности с глубиной, по своему физическому содержанию недостаточно адекватна: имеет сильные «высокочастотные» латеральные вариации плотности.

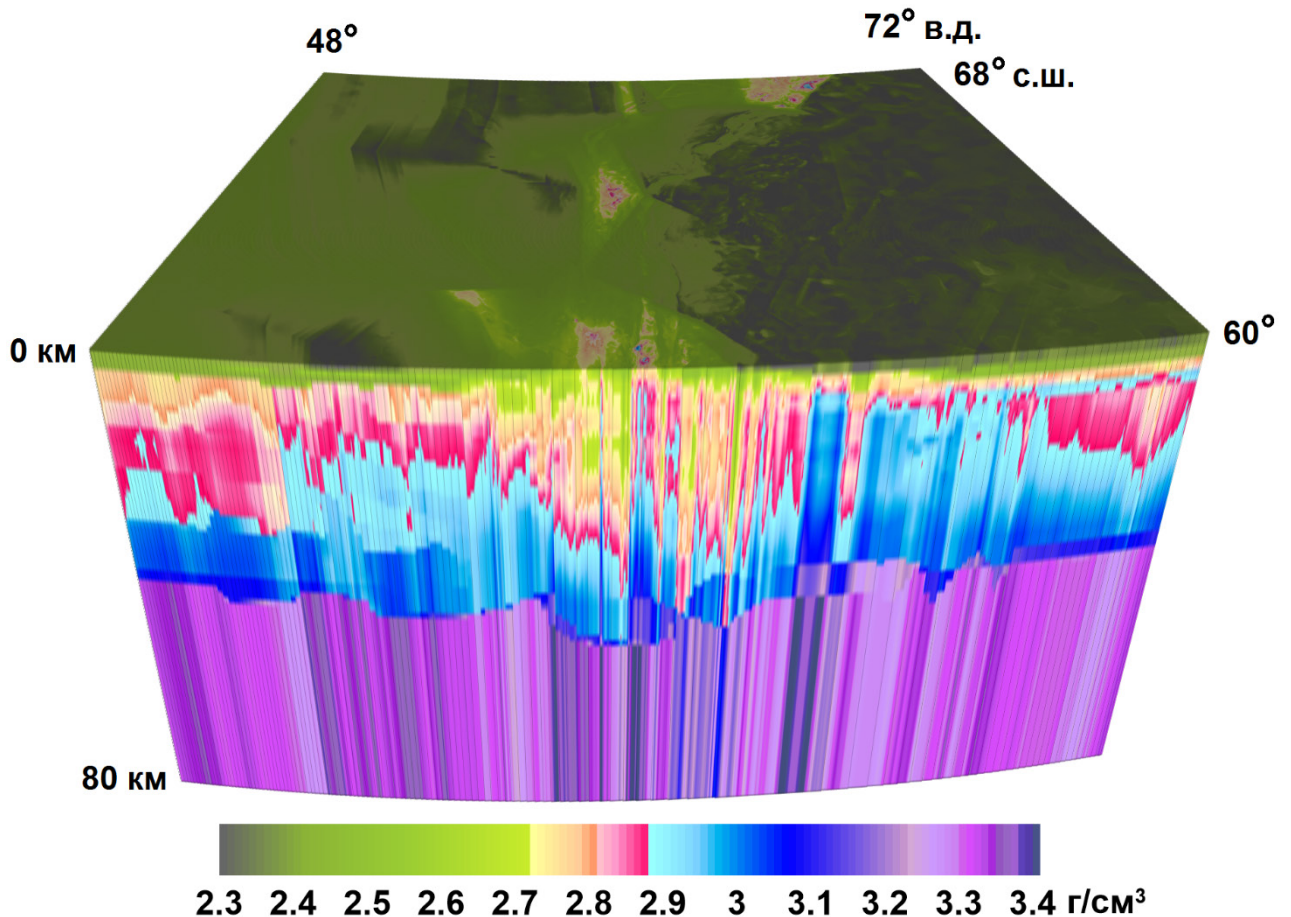


Рисунок 20. Плотностная модель, удовлетворяющая наблюдаемому полю, полученная в результате решения линейной обратной задачи для интервала глубин (-80; 0) км при задании $\rho_0(z) = \sigma_0(z)$.

3.4 Выводы по главе

Неадекватность получившейся модели обусловлена тем, что разность наблюдаемого поля и поля модели начального приближения (которая фактически и подбирается алгоритмом, вместо исходного наблюдаемого поля) содержит в себе «высокочастотные» латеральные вариации, и, поскольку за латеральное распределение плотности в итоговой модели отвечает единственная однозначная функция $\Phi(x, y)$, они «наследуются» результирующей функцией плотности $\rho(x, y, z) = \rho^{(0)}(x, y, z) + \rho_0(z)\Phi(x, y)$. Чтобы исправить эту ситуацию следует, очевидно, иметь несколько $\Phi(x, y)$ для разных глубин и сделать так, чтобы «высокочастотная» часть подбираемого поля была выбрана $\Phi(x, y)$, относящимися к малым глубинам, а «низкочастотная» часть поля – $\Phi(x, y)$, относящимися к большим глубинам. Однако, в связи с этим возникает еще две трудности. Первая: нужно обеспечить «непрерывную стыковку» слоев с разными $\Phi(x, y)$, поскольку иначе в модели вдоль всего ее протяжения будут видны строго горизонтальные границы слоев со скачком плотности между ними, чего в физически адекватной модели, разумеется, быть не должно. Вторая: для применения описанного выше алгоритма нахождения $\Phi(x, y)$, соответствующей некоторому слою заданной мощности и глубины залегания, необходимо знать поле этого слоя. Таким образом, если мы разобьем модель на несколько слоев по глубине и будем искать свою $\Phi(x, y)$ для каждого, то ему нужно будет поставить в соответствие часть наблюдаемого поля, которая, по нашему субъективному мнению, обусловлена массами этого слоя. Естественно, поточечная сумма всех таких частей должна равняться наблюдаемому полю. Первая трудность обходится «автоматически», если мощности указанных слоев модели не слишком большие, и соответствующие части разделенного наблюдаемого поля меняются при переходе между соседними слоями без существенных скачков (как показывает практика, $\Phi(x, y)$ сохраняет, в общих чертах, морфологию обуславливающего поля). Решению второй проблемы с соблюдением условия на «непрерывность» разделения наблюдаемого поля посвящена следующая глава.

4 Разделение гравитационного поля при помощи аппарата аналитического продолжения гармонических функций

Как правило, из априорных данных известно, что исследуемые аномалии от геологических структур залегают на определенной глубине под дневной поверхностью (такой априорной информацией становятся, например, результаты интерпретации данных сейсморазведки). Разделение аномалий наблюдаемого гравитационного поля по глубине и их связь с глубинными объектами может составлять основу интерпретационных схем для задач гравитационного моделирования [27]. Классический способ разделения полей включает спектральную фильтрацию с последующим аналитическим продолжением разделенных аномалий [56]. Одна из удачных реализаций – система «VECTOR» для трансформации горизонтальных градиентов аномалий гравитационного поля [8, 51]. Фильтрация поля путем повысотных трансформаций обеспечила существенное продвижение вперед в вопросах разделения разноглубинных аномалий.

Для разделения аномалий наблюдаемого поля по глубине мы будем пользоваться оригинальной методикой повысотных трансформаций [28, 33, 36] с предложенной автором модификацией вычислительной части, основанной на методе локальных поправок. Считаем, что исходное разделяемое поле $g(x, y, 0)$ задано на плоскости $z = 0$. Общая схема метода выделения эффекта источников в слое от земной поверхности до некоторой глубины $z = -H$ состоит из трех этапов.

1) Поле аналитически продолжаем вверх на уровень $z = H$: $g(x, y, 0) \xrightarrow{up(H)} g(x, y, H)$, при этом предполагаем, что влияние локальных приповерхностных источников (до глубины $z = -H$) если и не устраняется совсем, то значительно ослабевает.

2) Для того, чтобы «избавиться» от влияния локальных источников, находящихся в горизонтальном слое от дневной поверхности $z = 0$ до глубины $z = -H$, пересчитанное вверх поле $g(x, y, H)$ затем аналитически продолжаем вниз на глубину $z = -H$: $g(x, y, H) \xrightarrow{down(2H, \kappa)} u(x, y, -H | (-\infty, -H])$. При этом, поскольку задача относится к классу некорректно поставленных, нужно использовать методы с применением регуляризации, и κ в формуле – параметр регуляризации.

Полученное поле можно рассматривать как поле от источников, расположенных ниже границы $z = -H$, заданное на плоскости $z = -H$. 3) На последнем шаге пересчитываем поле $u(x, y, -H|(-\infty, -H])$ вновь вверх на уровень дневной поверхности $z = 0$: $u(x, y, -H|(-\infty, -H]) \xrightarrow{up(H)} u(x, y, 0|(-\infty, -H])$. Полученное поле можно рассматривать как поле от источников, расположенных ниже границы $z = -H$, заданное на плоскости $z = 0$. Далее, вычитаем это поле из исходного и получаем поле от слоя $z \in (-H, 0]$: $u(x, y, 0|(-H, 0]) = g(x, y, 0) - u(x, y, 0|(-\infty, -H])$.

Если мы хотим получить поле $u(x, y, 0|(-H_2, -H_1])$, заданное на плоскости $z = 0$, от источников, расположенных в интервале глубин $z \in (-H_2, -H_1]$, то нужно выполнить три этапа метода для высот H_1 и H_2 , а затем взять разность результатов: $u(x, y, 0|(-H_2, -H_1]) = u(x, y, 0|(-\infty, -H_1]) - u(x, y, 0|(-\infty, -H_2])$. Таким образом, если на плоскости $z = 0$ задано наблюдаемое поле $g(x, y, 0)$, а также имеется упорядоченное множество глубин $(-H_i)_{i=0}^L$, $0 = H_0 < H_1 < \dots < H_L$, то задача разделения $g(x, y, 0)$ на составляющие $(u(x, y, 0|(-H_{i+1}, -H_i]))_{i=0}^{L-1}$, заданные на плоскости $z = 0$, соответствующие полям от источников, расположенных в интервалах глубин $((-H_{i+1}, -H_i))_{i=0}^{L-1}$, может решаться следующим образом. Для каждой глубины $-H_i$ независимо выполняются три шага метода пересчетов, описанных выше, и получается поле $u(x, y, 0|(-\infty, -H_i])$, при этом на втором этапе используется регуляризатор κ_i , $u(x, y, 0|(-\infty, -H_0]) = g(x, y, 0)$. Далее для последовательных глубин вычисляется разность $u(x, y, 0|(-H_{i+1}, -H_i]) = u(x, y, 0|(-\infty, -H_i]) - u(x, y, 0|(-\infty, -H_{i+1}])$. При этом получается, что $g(x, y, 0) = u(x, y, 0|(-\infty, -H_L]) + \sum_{i=0}^{L-1} u(x, y, 0|(-H_{i+1}, -H_i])$.

Локальная составляющая аномалий гравитационного поля отражает плановое расположение источников (в проекции на дневную поверхность) в пределах выбранного участка исследований. Некоторое представление о пространственном положении аномалиеобразующих объектов можно получить по аномалиям наблюдаемого поля, отфильтрованным по параметру полуширины.

Пересчет поля на несколько высот ($up(\cdot)$) с последующим аналитическим продолжением на соответствующие глубины ($down(\cdot, \cdot)$), позволяет выделить из суммарного поля составляющие различных «длин волн» и соотнести их с аномалиями от неоднородностей на нижележащих горизонтах. Вычисление поля в верхнем полупространстве ($up(\cdot)$), т.е. вне области нижележащих масс выполняется по интегральной формуле Пуассона. Пересчет вниз ($down(\cdot, \cdot)$) через массы неоднородного слоя опирается на решение обратной задачи аналитического продолжения потенциальных полей. Для разделения полей по глубине и локализации источников аномальных масс в горизонтальном слое была разработана технология последовательных аналитических пересчетов на несколько высот и глубин. [28]. Фильтр повысотных трансформант – это разность последовательно пересчитанных полей между двумя указанными глубинами.

4.1 Описание операции $up(\cdot)$ пересчета вверх

Предположим, что гравитирующие массы расположены в слое ниже горизонтальной плоскости с аппликацией z . На этой плоскости гравитационное поле обозначим через $u(\cdot, \cdot, z)$ и примем его в качестве граничной функции задачи Дирихле для уравнения Лапласа по полубесконечной области. По значениям на границе решение $u(\cdot, \cdot, \zeta)$ этой задачи восстанавливает гармоническую функцию поля всюду выше z . Так для точек верхнего полупространства $\zeta \geq z$ решение $u(\cdot, \cdot, \zeta)$ задачи можно записать через интеграл Пуассона [69]:

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\zeta - z}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x, y, z) dx dy}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (25)$$

Операция $u(\cdot, \cdot, z) \xrightarrow{up(H)} u(\cdot, \cdot, \zeta)$ пересчета вверх на разницу высот (глубин) $H = \zeta - z \geq 0$ есть непосредственное взятие интеграла в формуле (25). Операция $u(\cdot, \cdot, \zeta) \xrightarrow{down(H, \kappa)} u(\cdot, \cdot, z)$ пересчета вниз на разницу высот (глубин) $H = \zeta - z \geq 0$ есть решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода (25), где значения поля $u(\cdot, \cdot, \zeta)$ считаются заданными, а найти нужно значения $u(\cdot, \cdot, z)$ под знаком интеграла. В общем случае отыскание решения этого уравнения – некорректно

поставленная задача, требующая регуляризации, что находит свое отражение в обозначении: κ – параметр регуляризации.

Подробно опишем реализацию операции $\text{up}(H)$ пересчета вверх на разницу высот $H = \zeta - z \geq 0$, которая будет использоваться в дальнейшем. Считаем, что поле $u(x, y, z)$ задано всюду на плоскости с аппликатой z кусочно-постоянной функцией:

$$u(x, y, z) = \begin{cases} u_{i,j}(z), & (x, y) \in [x_i; x_{i+1}) \times [y_j; y_{j+1}) \\ u_a, & (x, y) \notin [x_{min}; x_{max}) \times [y_{min}; y_{max}) \end{cases}, \quad (26)$$

где $x_{min} = x_0 < x_1 < \dots < x_{M_x} = x_{max}$, $y_{min} = y_0 < y_1 < \dots < y_{M_y} = y_{max}$, u_a можно считать горизонтальной асимптотой поля. В таком случае интеграл (25) берется аналитически в следующем виде:

$$u(\xi, \eta, \zeta) = u_a + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{M_x-1} \sum_{j=0}^{M_y-1} (u_{i,j}(z) - u_a) \left(\arctg \left(\frac{(x - \xi)(y - \eta)}{HR} \right) \right) \Big|_{x=x_i}^{x_{i+1}} \Big|_{y=y_j}^{y_{j+1}}, \quad (27)$$

где $R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + H^2}$. Как можно видеть, асимптота поля при пересчете не меняется.

Формула (27) позволяет вычислять значения $u(\xi, \eta, \zeta)$ пересчитанного на высоту ζ поля в точке. В дальнейшем для пересчета вниз $\text{down}(\cdot, \cdot)$ нам потребуется приближать пересчитанное вверх поле $u(\xi, \eta, \zeta)$ кусочно-постоянной функцией на тех же интервалах, что и поле $u(x, y, z)$. Для этого нужно усреднить $u(\xi, \eta, \zeta)$ на указанных интервалах:

$$u(\xi, \eta, \zeta) \approx \begin{cases} u_{n,m}(\zeta), & (\xi, \eta) \in [x_n; x_{n+1}) \times [y_m; y_{m+1}) \\ u_a, & (\xi, \eta) \notin [x_{min}; x_{max}) \times [y_{min}; y_{max}) \end{cases}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} u_{n,m}(\zeta) &= \frac{1}{(x_{n+1} - x_n)(y_{m+1} - y_m)} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \int_{y_m}^{y_{m+1}} u(\xi, \eta, \zeta) d\eta d\xi = \\ &= u_a + \frac{1}{2\pi(x_{n+1} - x_n)(y_{m+1} - y_m)} \times \end{aligned} \quad (29)$$

$$\times \sum_{i=0}^{M_x-1} \sum_{j=0}^{M_y-1} (u_{i,j}(z) - u_a) v(x - \xi, y - \eta, H) \left| \begin{array}{l} x_{n+1} \\ \xi = x_n \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} y_{m+1} \\ \eta = y_m \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} x_{i+1} \\ x = x_i \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} y_{j+1} \\ y = y_j \end{array} \right|,$$

где $v(x, y, z) = xy \operatorname{arctg} \left(\frac{xy}{zR} \right) - \frac{xz}{2} \ln \left(\frac{R-x}{R+x} \right) - \frac{yz}{2} \ln \left(\frac{R-y}{R+y} \right) - zR$, $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Заметим, что при последовательном расчете $u_{n,m}(\zeta)$ для всех возможных индексов $0 \leq n \leq M_x - 1$ и $0 \leq m \leq M_y - 1$ по формуле (29) нам бы пришлось $4M_x^2 M_y^2$ раз вычислять значение функции v при некоторых аргументах. Однако, можно на порядок сократить это количество, если положить, что сетка дискретизации поля равномерная по x и y , т.е. $\forall 0 \leq i \leq M_x - 1, 0 \leq j \leq M_y - 1$: $x_{i+1} - x_i = \Delta x, y_{j+1} - y_j = \Delta y$ и переписать (29) в виде:

$$u_{n,m}(\zeta) = u_a + \frac{1}{2\pi\Delta x\Delta y} (T_{n+1,m+1} - T_{n+1,m} - T_{n,m+1} + T_{n,m}), \quad (30)$$

$$T_{n,m} = \sum_{i=0}^{M_x-1} \sum_{j=0}^{M_y-1} (u_{i,j}(z) - u_a) v(x - x_n, y - y_m, H) \left| \begin{array}{l} x_{i+1} \\ x = x_i \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} y_{j+1} \\ y = y_j \end{array} \right|. \quad (31)$$

Далее, способом, аналогичным (6-12), можно записать (31) следующим образом:

$$T_{n,m} = \sum_{i=-n}^{M_x-n} \sum_{j=-m}^{M_y-m} \bar{u}_{i+n,j+m}(z) v_{i,j}(H), \quad (32)$$

где $\bar{u}_{n,m}(z) = u_{n,m}(z) - u_{n,m-1}(z) - u_{n-1,m}(z) + u_{n-1,m-1}(z)$, считаем, что $u_{n,m}(z) = u_a$, если $n = -1 \vee n = M_x \vee m = -1 \vee m = M_y$; $v_{i,j}(H) = v(i\Delta x, j\Delta y, H)$.

Таким образом, пересчет вверх $up(H)$ состоит из шагов:

-1) подготовительный этап, делается один раз заранее и подходит для любого исходного поля, зависит только от разности высот пересчета H и шагов дискретизации сетки $\Delta x, \Delta y$, основан на том, что элементы $v_{i,j}(H)$ не зависят от входных амплитуд $u_{n,m}(z)$ поля, а только от $H, \Delta x$ и Δy . Состоит в вычислении

$(2M_x + 1)(2M_y + 1)$ элементов множества $\left(v_{i,j}(H) \right)_{(i,j)=(-M_x,-M_y)}^{(M_x,M_y)}$. Отметим, что

функция $v(x, y, z)$ четная по x и y и нечетная по z , а значит $v_{i,j}(H) = v_{-i,j}(H) = v_{i,-j}(H) = v_{-i,-j}(H)$, и фактически вычислять нужно $(M_x + 1)(M_y + 1)$ значений

$v(x, y, z)$ при различных аргументах, что на порядок меньше $4M_x^2M_y^2$ значений при счете по (29) «в лоб».

0) Исходные данные: множество $\left(u_{n,m}(z)\right)_{(n,m)=(0,0)}^{(M_x-1,M_y-1)}$ из M_xM_y элементов – амплитуды поля в кусочно-постоянном представлении.

1) Вычисление $(M_x + 1)(M_y + 1)$ элементов множества $\left(\bar{u}_{n,m}(z)\right)_{(n,m)=(0,0)}^{(M_x,M_y)}$.

2) Вычисление $(M_x + 1)(M_y + 1)$ элементов множества $\left(T_{n,m}\right)_{(n,m)=(0,0)}^{(M_x,M_y)}$ по формуле (32).

3) Вычисление M_xM_y элементов выходного множества $\left(u_{n,m}(\zeta)\right)_{(n,m)=(0,0)}^{(M_x-1,M_y-1)}$ по формуле (30).

Как видим, достаточно длительный по времени счета шаг вообще не входит непосредственно в пересчет $\text{up}(H)$. Это обстоятельство существенно сказывается на времени выполнения операции пересчета вниз $\text{down}(H, \kappa)$.

Аналогично (32) можно записать «быстрый» вариант (27) для вычисления пересчитанного вверх поля в множестве точек вида $(\xi_0 + n\Delta x, \eta_0 + m\Delta y, \zeta)$:

$$u(\xi_0 + n\Delta x, \eta_0 + m\Delta y, \zeta) = u_a + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=-n}^{M_x-n} \sum_{j=-m}^{M_y-m} \bar{u}_{i+n,j+m}(z) \arctg \left(\frac{(i\Delta x - \xi_0)(j\Delta y - \eta_0)}{HR} \right), \quad (33)$$

где $R = \sqrt{(i\Delta x - \xi_0)^2 + (j\Delta y - \eta_0)^2 + H^2}$. При этом, если ξ_0 и η_0 фиксированы, а $0 \leq n \leq N_x - 1$, $0 \leq m \leq N_y - 1$, то значение арктангенса нужно вычислять от $(N_x + M_x)(N_y + M_y)$ различных аргументов. Если при тех же условиях пользоваться формулой (27), то понадобилось бы $4N_xN_yM_xM_y$ вычислений арктангенса. Конечно, среди этих $4N_xN_yM_xM_y$ значений различных оказалось бы не более $(N_x + M_x)(N_y + M_y)$, но по виду (27) определить это проблематично.

4.2 Описание операции $\text{down}(\cdot, \cdot)$ пересчета вниз

Подробно опишем реализацию операции $\text{down}(H, \kappa)$ пересчета вниз на разницу высот $H = \zeta - z \geq 0$, с регуляризатором κ . Как уже говорилось выше, необходимо решать интегральное уравнение Фредгольма 1-ого рода (25) относительно неизвестной функции $u(x, y, z)$, z фиксировано. Будем использовать тот же кусочно-постоянный вариант параметризации поля, как для операции $\text{up}(H)$, т. е. искать $u(x, y, z)$ в виде (26) и считать, что поле $u(\xi, \eta, \zeta)$ в левой части (25) задано своими средними значениями (28) в указанных границах.

Искать $u(x, y, z)$ будем при помощи модифицированного метода локальных поправок, который для уравнения (16) описан в предыдущей главе. Воспроизведем здесь его этапы для решения уравнения (25) и выбранной параметризации. Исходные данные на «нулевой» итерации (номер итерации обозначаем верхним индексом в скобках): множество $\left(\delta u_{n,m}^{(0)}(\zeta) \right)_{(n,m)=(0,0)}^{(M_x-1, M_y-1)}$ «остаточных» амплитуд поля на высоте ζ , принимаем $\delta u_{n,m}^{(0)}(\zeta) = u_{n,m}(\zeta)$; множество $\left(u_{n,m}^{(0)}(z) \right)_{(n,m)=(0,0)}^{(M_x-1, M_y-1)}$ амплитуд поля на высоте z , принимаем $u_{n,m}^{(0)}(z) = 0$. Пояснение по поводу «остаточного» поля $\delta u_{n,m}^{(\theta)}(\zeta)$ на итерации θ : если считать, что $u^{(\theta)}(z) \xrightarrow{\text{up}(H)} u^{(\theta)}(\zeta)$, то $\delta u_{n,m}^{(\theta)}(\zeta) = u_{n,m}(\zeta) - u_{n,m}^{(\theta)}(\zeta)$. На каждой итерации горизонтальная асимптота у всех фигурирующих в алгоритме полей остается равной u_a , и важны, на самом деле, не абсолютные значения полей, а их отклонения от асимптоты. Пояснение по используемым обозначениям: когда пишем без индексов $u^{(\theta)}(z)$, $u^{(\theta)}(\zeta)$, $\delta u^{(\theta)}(\zeta)$, $w^{(\theta)}$, S имеем в виду кусочно-постоянные функции, зависящие от x и y , с областью определения \mathbb{R}^2 , когда пишем с индексами $u_{n,m}^{(\theta)}(z)$, $u_{n,m}^{(\theta)}(\zeta)$, $\delta u_{n,m}^{(\theta)}(\zeta)$, $w_{n,m}^{(\theta)}$, $S_{n,m}$ имеем в виду среднее значение этих функций в области $[x_n; x_{n+1}) \times [y_m; y_{m+1})$. Для приведенного ниже метода существенно, что область по x и y , на которой мы будем варьировать искомую функцию $u(x, y, z)$, есть $[x_{\min}; x_{\max}) \times [y_{\min}; y_{\max})$ и совпадает с областью фактического задания известного поля $u(x, y, \zeta)$ на высоте ζ . Также, значения всех фигурирующих в методе функций $u^{(\theta)}(z)$, $u^{(\theta)}(\zeta)$, $\delta u^{(\theta)}(\zeta)$,

$w^{(\theta)}$, S вне области $[x_{min}; x_{max}] \times [y_{min}; y_{max}]$ приравниваются к значению u_a горизонтальной асимптоты, т. е., например, результаты пересчета вверх $up(H)$ вне указанной области игнорируются и заменяются на u_a .

Итак, этапы модифицированного метода локальных поправок для решения (25) в выбранной кусочно-постоянной параметризации:

1) Пересчитываем вверх $\delta u^{(\theta-1)}(\zeta) \xrightarrow{up(H)} w^{(\theta)}$. Вообще говоря, по смыслу пересчета вверх $up(H)$ поле $w^{(\theta)}$ определено в плоскости с аппликацией $\zeta + H$, но нам в дальнейшем $w^{(\theta)}$ нужна только как формальная функция от x и y , физического смысла она не несет.

2) Считаем $\alpha^{(\theta)}$ и $\beta^{(\theta)}$:

$$\alpha^{(\theta)} = \frac{1}{Q^{(\theta)}} (\langle S - u_a, S - u_a \rangle \langle \delta u^{(\theta-1)}(\zeta) - u_a, w^{(\theta)} - u_a \rangle - \langle S - u_a, w^{(\theta)} - u_a \rangle \langle \delta u^{(\theta-1)}(\zeta) - u_a, S - u_a \rangle)$$

$$\beta^{(\theta)} = \frac{1}{Q^{(\theta)}} (\langle w^{(\theta)} - u_a, w^{(\theta)} - u_a \rangle \langle \delta u^{(\theta-1)}(\zeta) - u_a, S - u_a \rangle - \langle S - u_a, w^{(\theta)} - u_a \rangle \langle \delta u^{(\theta-1)}(\zeta) - u_a, w^{(\theta)} - u_a \rangle)$$

$$Q^{(\theta)} = \langle w^{(\theta)} - u_a, w^{(\theta)} - u_a \rangle \langle S - u_a, S - u_a \rangle - \langle S - u_a, w^{(\theta)} - u_a \rangle^2,$$

где скалярное произведение $\langle u, w \rangle = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \int_{y_{min}}^{y_{max}} u(x, y) w(x, y) dx dy$ для выбранной параметризации запишется в виде $\langle u, w \rangle = \Delta x \Delta y \sum_{n=0}^{M_x-1} \sum_{m=0}^{M_y-1} u_{n,m} w_{n,m}$; S – пересчет вверх на разницу высот H «единичного» поля: равного $u_a + 1$ в точках $(x, y) \in [x_{min}; x_{max}] \times [y_{min}; y_{max}]$ и равного u_a в точках $(x, y) \notin [x_{min}; x_{max}] \times [y_{min}; y_{max}]$.

$$S(x, y) = u_a + \arctg \left(\frac{(x - \xi)(y - \eta)}{H \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + H^2}} \right) \Bigg|_{\xi = x_{min}}^{x_{max}} \Bigg|_{\eta = y_{min}}^{y_{max}},$$

$$S_{n,m} = u_a + \frac{1}{2\pi \Delta x \Delta y} v(x - \xi, y - \eta, H) \Bigg|_{\xi = x_{min}}^{x_{max}} \Bigg|_{\eta = y_{min}}^{y_{max}} \Bigg|_{x = x_n}^{x_{n+1}} \Bigg|_{y = y_m}^{y_{m+1}}.$$

Аналогично $w^{(\theta)}$, S – формальная функция от x и y .

$$3) u_{n,m}^{(\theta)}(z) = u_{n,m}^{(\theta-1)}(z) + \alpha^{(\theta)} \left(\delta u_{n,m}^{(\theta-1)}(\zeta) - u_a \right) + \beta^{(\theta)}.$$

$$4) \text{ Как можно видеть, } u^{(\theta)}(z) \xrightarrow{\text{up}(H)} u^{(\theta)}(\zeta) = u^{(\theta-1)}(\zeta) + \alpha^{(\theta)}(w^{(\theta)} - u_a) + \beta^{(\theta)}(S - u_a), \text{ поэтому } \delta u_{n,m}^{(\theta)}(\zeta) = u_{n,m}(\zeta) - u_{n,m}^{(\theta)}(\zeta) = \delta u_{n,m}^{(\theta-1)}(\zeta) + u_{n,m}^{(\theta-1)}(\zeta) - u_{n,m}^{(\theta)}(\zeta) = \delta u_{n,m}^{(\theta-1)}(\zeta) - \alpha^{(\theta)}(w_{n,m}^{(\theta)} - u_a) - \beta^{(\theta)}(S_{n,m} - u_a).$$

5) Проверяем условие остановки итерационного процесса: $\|\delta u^{(\theta)}(\zeta) - u_a\| = \sqrt{\langle \delta u^{(\theta)}(\zeta) - u_a, \delta u^{(\theta)}(\zeta) - u_a \rangle} < \varepsilon$ (достижение требуемой точности ε подбора поля), если оно не выполнено – переходим к следующей итерации $\theta + 1$ на шаг 1.

Если в приведенном алгоритме на этапе 1 для пересчета вверх использовать формулы (30, 32), то аппроксимируемые величины $u_{n,m}(\zeta)$ будут обозначать средние по областям $[x_n; x_{n+1}] \times [y_m; y_{m+1}]$ значения поля, которое должно получиться в результате пересчета вверх искомого поля $u(z)$. Если же на 1-ом этапе использовать формулу (33) с условием $(\xi_0, \eta_0) \in [x_0; x_1] \times [y_0; y_1]$, то величины $u_{n,m}(\zeta)$ будут обозначать значения пересчитанного поля в конкретных точках вида $(\xi_0 + n\Delta x, \eta_0 + m\Delta y, \zeta)$. Оба варианта можно использовать, но стоит отметить, что подбор среднего значения по области более стабилен, чем подбор значения всего в одной точке этой области. Также во втором случае $\delta u_{n,m}^{(\theta-1)}(\zeta)$ – это значение $\delta u^{(\theta-1)}(\zeta)$ в одной конкретной точке области $[x_n; x_{n+1}] \times [y_m; y_{m+1}]$, и для операции $\text{up}(H)$ в выбранной кусочно-постоянной параметризации его требуется «продолжить» на всю область, что вносит большую погрешность, чем «честное» усреднение. Кроме того, приведенная на этапе 2 формула для скалярного произведения во втором случае снова дает большую погрешность.

Как показывает практика, приведенный выше метод пересчета вниз сходится и без классической регуляризации (в обоих вариантах: и с усреднением, и в «поточечном»), но, быть может, не к нулевой погрешности ε . Однако, для целей, описанных в следующем параграфе, введем формальную регуляризацию. Поскольку ядро интеграла (25) – симметричное и положительно определенное,

можно применить регуляризацию М. М. Лаврентьева [24]. Регуляризованное уравнение имеет вид:

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \kappa u(\xi, \eta, z) + \frac{\zeta - z}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x, y, z) dx dy}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (34)$$

ζ и z фиксированы, $\kappa > 0$ – параметр регуляризации. Это уравнение при любой левой части из L_2 обязательно имеет ровно одно решение из L_2 , причем оно непрерывно зависит от κ [24]. Решать (34) можно предложенным выше модифицированным методом локальных поправок для уравнения (25) с кусочно-постоянной параметризацией, но с измененным способом вычисления $w^{(\theta)}$ на первом этапе: вместо $\delta u^{(\theta-1)}(\zeta) \xrightarrow{up(H)} w^{(\theta)}$ будет $\delta u^{(\theta-1)}(\zeta) \xrightarrow{up(H)} \hat{w}^{(\theta)}$, $w^{(\theta)} = \hat{w}^{(\theta)} + \kappa \delta u^{(\theta-1)}(\zeta)$.

4.3 Применение пересчетов к построению плотностной модели

Рассмотрим предложенный в начале главы способ выделения из общего наблюдаемого поля $g(x, y, 0)$ гравитационного эффекта $u(x, y, 0 | (-\infty, -H])$ источников в полупространстве ниже некоторой глубины $z = -H < 0$: $g(x, y, 0) \xrightarrow{up(H)} g(x, y, H) \xrightarrow{down(2H, \kappa)} u(x, y, -H | (-\infty, -H]) \xrightarrow{up(H)} u(x, y, 0 | (-\infty, -H])$. Считаем, что $g(x, y, 0)$ задано точно своим кусочно-постоянным представлением. Если бы операции $up(H)$ и $down(H, 0)$ производились аналитически точно, то, конечно, в результате мы бы получили $u(x, y, 0 | (-\infty, -H]) \equiv g(x, y, 0)$. В предложенных реализациях пересчетов, однако, существуют погрешности: усреднение точных результатов $up(H)$ в ячейках $[x_n; x_{n+1}) \times [y_m; y_{m+1})$ и приравнивание значений $up(H)$ и $down(H, 0)$ вне целевой области $[x_{min}; x_{max}) \times [y_{min}; y_{max})$ горизонтальной асимптоте u_a . Кроме того, уравнение (25) для пересчета вниз может вообще не иметь точного решения, особенно для реальных наблюдаемых полей в левой части. При всем этом, с трехэтапной схемой пересчетов при различных параметрах $H, M_x, M_y, \Delta x, \Delta y$ (и $\kappa = 0$) Автором было проведено большое количество численных экспериментов над данными измеренных полей. В самых плохих случаях «высокочастотных» полей и больших H порядка 100 км

невязка $\frac{\|g(x,y,0)-u(x,y,0|(-\infty,-H])\|}{\|g(x,y,0)\|}$ составляла не более 10%, а при $H < 40$ км, обычно, не более 1%. Итак, если стремиться к наибольшей точности при реализации схемы пересчетов с использованием аналитического продолжения гармонических функций, то никакого разделения полей не получится. Собственно, для целей разделения в операцию $\text{down}(H, \kappa)$ и была введена формальная регуляризация.

Результат $u(x, y, 0|(-\infty, -H])$ трехэтапной схемы пересчетов непрерывно зависит от параметра регуляризации κ , кроме того, чем больше κ , тем он более сглаженный (а в пределе вообще – плоскость: $\lim_{\kappa \rightarrow +\infty} u(x, y, 0|(-\infty, -H]) = u_a$). Пусть мы разделяем наблюдаемое поле $g(x, y, 0)$ по L горизонтальным слоям с интервалами глубин $((-H_{i+1}, -H_i])_{i=0}^{L-1}$ и принимаем в качестве поля этого слоя $u(x, y, 0|(-H_{i+1}, -H_i]) = u(x, y, 0|(-\infty, -H_i]) - u(x, y, 0|(-\infty, -H_{i+1}])$, при этом поля $u(x, y, 0|(-\infty, -H_i])$ получены с использованием регуляризаторов κ_i , за исключением $u(x, y, 0|(-\infty, -H_0]) = g(x, y, 0)$, $H_0 = 0$, $\kappa_0 = 0$. Если мы считаем, что все наблюдаемое поле обеспечивается массами в слое $(-H_L, 0]$, то нужно обеспечить $u(x, y, 0|(-\infty, -H_L]) \approx u_a$, для этого выбрать κ_L достаточно большим. Выходит, для выполнения условия «непрерывной» стыковки разделенных полей $u(x, y, 0|(-H_{i+1}, -H_i])$ соседних слоев, необходимого, как указано в конце предыдущей главы, для соединения слоев плотностной модели без «скачков», требуется выбирать κ_i по возрастанию между $\kappa_0 = 0$ и κ_L без резких переходов от κ_{i-1} к κ_i . Возрастание с глубиной κ_i приводит последовательность разделенных полей в соответствие с физическим смыслом: чем больше глубина залегания слоя, тем более «сглажено» поле от него на дневной поверхности. Конечно, существует бесконечно много вариантов «непрерывных» возрастающих последовательностей κ_i , причем эти варианты могут давать существенно отличающиеся друг от друга пересчеты и, соответственно, плотностные модели, но именно в этом и проявляется неединственность решения линейной обратной задачи гравиметрии. Выбор одного из вариантов ложится на плечи интерпретатора, это – элемент субъективности.

Большой плюс в том, что малые изменения последовательности k_i приведут к малым изменениям разделенных полей и результирующей плотностной модели.

Таким образом, k используется в пересчетах не для регуляризации, а как непрерывный сглаживающий фактор, который нельзя заменить на, скажем, несколько проходов по наблюдаемому полю дискретным фильтром Гаусса во «временной» области, потому что для верхних слоев даже один такой проход – слишком много. Другие авторы, например, в работе [56], для целей разделения полей используют фильтры, работающие в «частотной» области, но, как кажется Автору, они менее наглядны в плане привязки к конкретным глубинам.

Перейдем к практической части: завершим построение плотностной модели территории с координатами 60° - 68° с. ш., 48° - 72° в. д. до глубины 80 км, начатое в предыдущей главе. Поскольку модель, полученная по наблюдаемому полю путем решения линейной обратной задачи для всего исследуемого объема «за раз», получилась неадекватной по физическому содержанию, было решено разделить подбираемое поле на несколько частей, соответствующих некоторым горизонтальным слоям модели с различными глубинами залегания. Теперь для этого у нас имеется метод пересчетов.

Разделим разность (см. рис. 18) наблюдаемого поля и поля начальной модели по 80-ти последовательным горизонтальным слоям мощностью 1 км каждый. Отдельные поля для таких слоев визуальны неинформативны, поэтому на рисунке 21 для примера показаны разделенные поля для слоев с глубинами $(-5;-0)$, $(-20;-5)$, $(-40;-20)$ и $(-80;-40)$ км. Амплитуды же получившихся «одно-километровых» полей находятся в пределах $[-6.2;6.4]$ мГал для слоя $(-1;0)$ км и к слою $(-80;-79)$ км плавно убывают до $[-0.07;0.05]$ мГал. По этим полям в рамках соответствующих границ слоев независимо друг от друга были решены линейные обратные задачи, относительная погрешность подбора поля для всех них устанавливалась в 0.5% и была достигнута. Получившиеся плотности находятся в пределах $[-0.17;0.21]$ г/см³ для слоя $(-1;0)$ км и к слою $(-80;-79)$ км плавно убывают до $[-0.004;0.003]$ г/см³. Это распределение плотности для всего слоя $(-80;0)$ км затем было добавлено к начальной модели (рис. 16). Результирующая плотностная модель показана на

рисунке 22. Как можно видеть, распределение плотности в мантии осталось почти без изменений по сравнению с начальным приближением, чехол и кора поменялись существенно. Однако, не наблюдается никаких «высокочастотных» латеральных вариаций, как при первой попытке построения модели только на основе решения линейной обратной задачи. Нет также и строго горизонтальных «скачков» между слоями, по которым разделялось поле, хотя, как уже говорилось, для каждого из них линейная обратная задача решалась независимо. Все это говорит о том, что выбранная стратегия разделения полей сработала, как и задумывалось.

Отметим, что было решено разделять и «переводить» в плотности именно разность полей наблюдаемого и модели начального приближения, а не само наблюдаемое поле, так как они имеют почти одинаковые амплитуды, и если бы мы работали с наблюдаемым полем, то результирующая модель имела бы на глубинах >40 км слишком малые отклонения от некоторого произвольно заданного распределения плотности, зависящего только от глубины ($\sigma_0(z)$, скажем). То есть мантия в такой модели никак не изменялась бы по латерали.

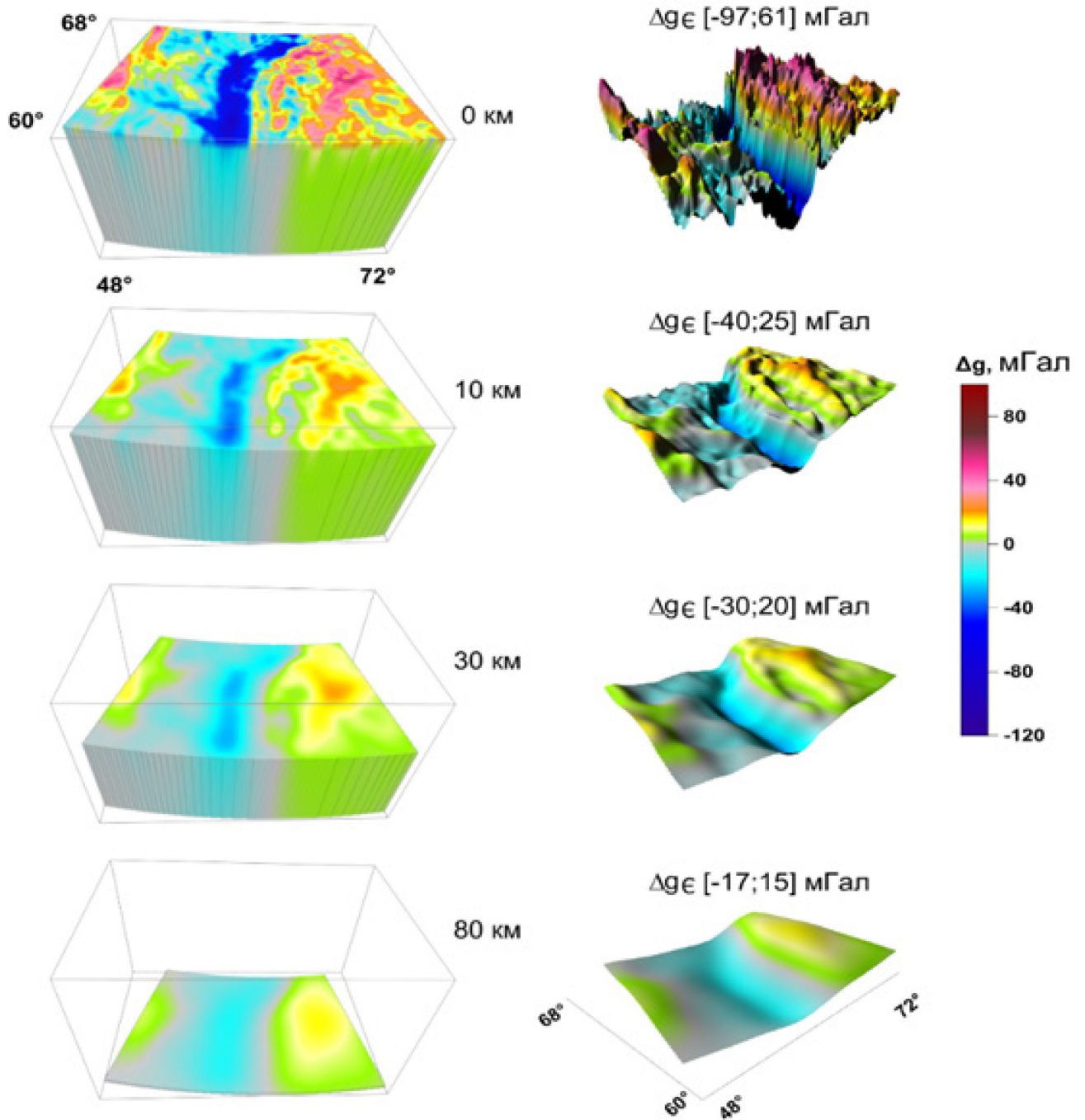


Рисунок 21. Разделение разности наблюдаемого поля и поля начальной модели по горизонтальным слоям с указанными границами по глубине, также указаны амплитуды получившихся полей.

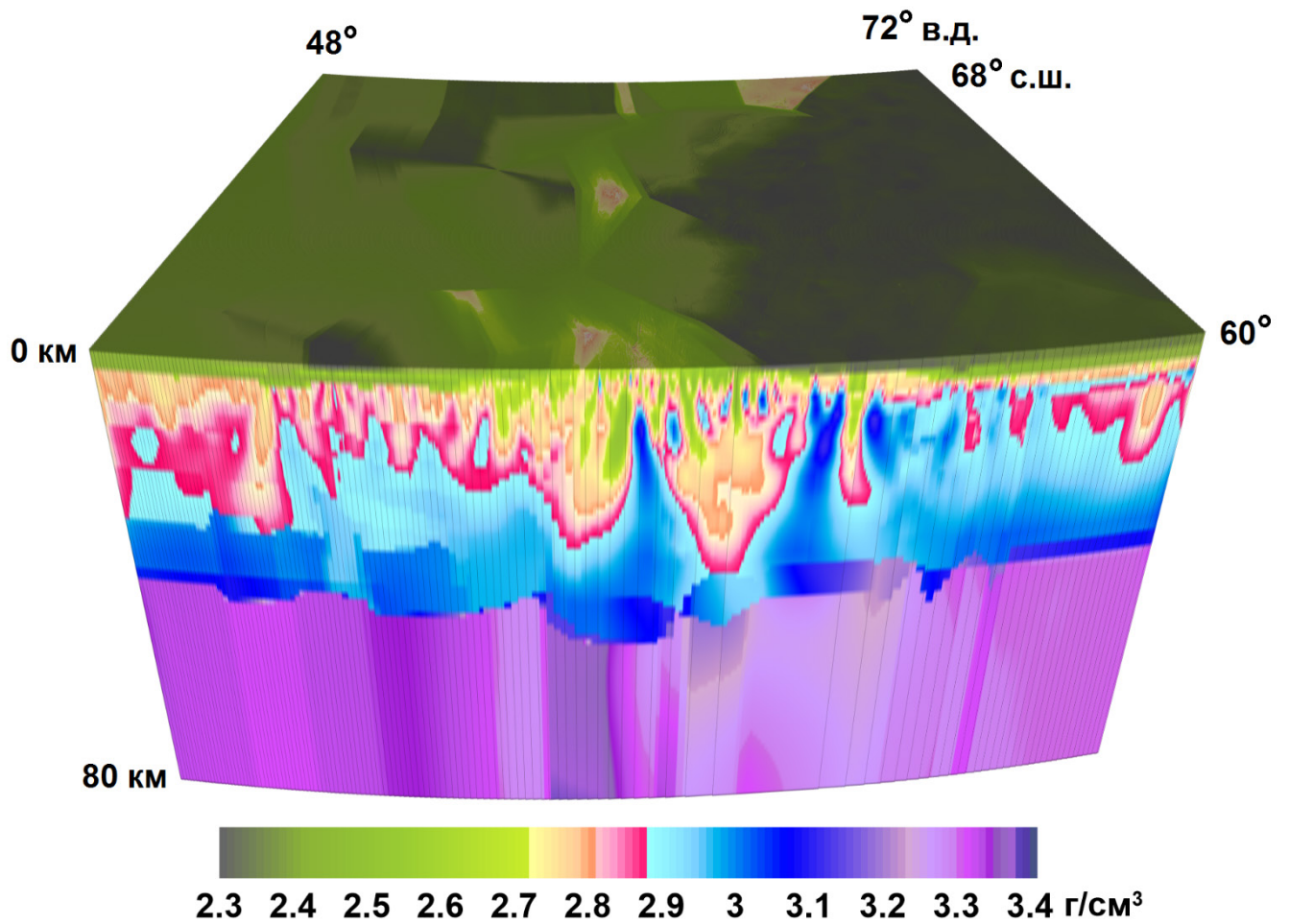


Рисунок 22. Плотностная модель, удовлетворяющая наблюдаемому полю, полученная в результате послойного решения линейной обратной задачи для набора разделенных полей; $\rho_0(z) = \sigma_0(z)$.

5 Крупномасштабное моделирование приповерхностных объектов

Процесс построения моделей распределения плотности по аномалиям гравитационного поля сводится к решению прямых и обратных задач гравиметрии. Обратная задача – вычисление неоднородных параметров модельного класса по известным значениям внешнего аномального поля – является классическим примером некорректной задачи: в общей постановке ее решение не единственно и неустойчиво зависит от исходных данных. Поэтому необходимо искать решения на практически содержательных множествах корректности, выбирая разумные модели начального приближения. Устойчивые решения обратной задачи можно получить для сравнительно узкого класса модельных объектов [61]; в том же классе желательно строить и модель начального приближения. Вычисляя отклонения «в малом» от начального распределения плотности можно привести модельное поле к наблюдаемому и обеспечить устойчивость подбора в классе слабоединственных решений.

Посмотрим, удастся ли применить изложенный в предыдущих главах аппарат пересчетов и решения линейной обратной задачи гравиметрии к построению моделей приповерхностных объектов. Как правило, из априорных данных известно о наличии локальных геологических объектов в приповерхностном слое на некоторой глубине (такими априорными данными становятся, например, данные, полученные по сейсморазведке). В пересчитанном на высоту, достаточно сглаженном поле влияние локальных приповерхностных источников заметно ослабевает. Но поля от протяженных, сопоставимых с морфологией рельефа плотностных границ разделить гораздо сложнее. Для небольших высот пересчета «длинноволновая» составляющая поля протяженных источников меняется незначительно и качественно напоминает поле глубинных масс. Следовательно, разделить эти составляющие только с помощью сглаживающего фильтра пересчетов на высоту не представляется возможным.

Для моделирования приповерхностных объектов в достаточно большом масштабе предлагается следующая методика. 1) В измеренное на земной поверхности наблюдаемое поле вводится поправка за региональный фон путем

исключения влияния боковых источников: либо, если имеется более «широкая» региональная модель меньшего масштаба, непосредственным вычитанием ее поля из наблюдаемого, либо вычитанием решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа от значений наблюдаемого поля на границе исследуемой области. 2) Затем выделяются гравитационные аномалии от источников, разделенных по горизонтальным слоям между двумя заданными глубинами. Инструментом фильтрации является метод сглаживания полей при их пересчете на различные высоты и последующим аналитическим продолжением на глубину. 3) По разделенным аномалиям поля послойно решается линейная обратная задача и вычисляется трехмерное распределение избыточной плотности относительно региональной модели (при этом $\rho_0(z)$ берется равным средней плотности $\sigma_0(z)$ по глубине этой модели), а за неимением таковой – относительно выбранной горизонтально-слоистой модели начального приближения $\rho_0(x, y, z) = \rho_0(z)$. Альтернативный вариант пунктов 2 и 3: 2) строится истокообразная аппроксимация локальной составляющей наблюдаемого поля; 3) решается линейная обратная задача для локальной составляющей наблюдаемого поля с $\rho_0(z)$ равной средней по тонким горизонтальным слоям плотности полученных источников. Далее в главе сравним два этих альтернативных варианта в условиях отсутствия региональной модели.

5.1 Исключение влияния региональных источников поля (разделение наблюдаемого поля на региональную и локальную составляющие)

Как показывают исследования геологических структур, существенный вклад в гравитационное поле исследуемого слоя могут оказывать источники, залегающие вне его. В частности, это источники, находящиеся вне рассматриваемой области в проекции на земную поверхность (боковые источники), а также источники, залегающие на глубинах меньше и больше рассматриваемой. При решении обратной задачи вклад от этих источников будет влиять на итоговую модель и может значительно исказить ее. Устойчивое определение аномальных масс и параметров локальных приповерхностных объектов возможно по результатам

интерпретации прослеженных гравитационных аномалий, заданных на уровне регионального фона внутри некоторой области Γ (здесь – область задания поля). Предполагается, что прослеженные аномалии от локальных тел характеризуются около нулевыми значениями на внешней границе $\partial\Gamma$ исследуемой площади Γ . Но измеренное поле имеет вполне конкретные (ненулевые) значения на границе области Γ . Их можно интерпретировать, как граничные значения региональной составляющей поля боковых источников. Тогда внутри области Γ составляющую регионального фона можно считать гармонической функцией и восстанавливать ее из решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа по граничным значениям исходного поля на границе $\partial\Gamma$.

Разделение наблюдаемого g_n гравитационного поля на «региональную» g_p и «локальную» g_l составляющие реализуется на основе решения двумерной внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\Delta g_p = 0, g_p \Big|_{\partial\Gamma} = g_n \Big|_{\partial\Gamma}$$

Можно считать, что поле от боковых источников будет «заложено» в найденной гармонической функции g_p , а «локальную» составляющую $g_l = g_n - g_p$ определяют в основном источники, расположенные (в плане) внутри области Γ . Гармоническая в области Γ функция может иметь экстремум разве что на границе этой области, поэтому в «локальном» поле g_l не могут появиться дополнительные «ложные» аномалии (по сравнению с наблюдаемым полем g_n). Кроме того g_l на границе целевой области Γ будет иметь нулевые значения, что хорошо для процедуры разделения поля: пересчитываемое поле должно выходить на асимптоту при приближении к границе Γ , иначе в результирующем поле будут наблюдаться граничные эффекты.

На рисунке 23 представлен практический пример исключения влияния боковых источников и восстановления «локальной» составляющей наблюдаемого поля в пределах исследуемой области. Наблюдаемое поле получено непосредственными измерениями на равномерной сетке с шагом 200 м в пределах перспективного участка геолого-геофизического опробования площадью

70×60 км². Наблюденное поле масштаба 1:200000 с поправкой за рельеф имеет явно выраженную «седлообразную» составляющую переменного фона диагонального простирания. Аномалии от локальных объектов практически полностью замаскированы уровнем регионального фона (см. рис. 23а). Фоновая составляющая восстанавливается гармонической функцией по граничным значениям исходного поля на обрамляющем контуре и исключается из наблюдённого поля. Выделенная «локальная» составляющая представлена на рисунке 23б. Нулевые граничные значения локальных аномалий существенно уменьшают погрешности аналитического продолжения поля при вычислении интегралов по конечной области.

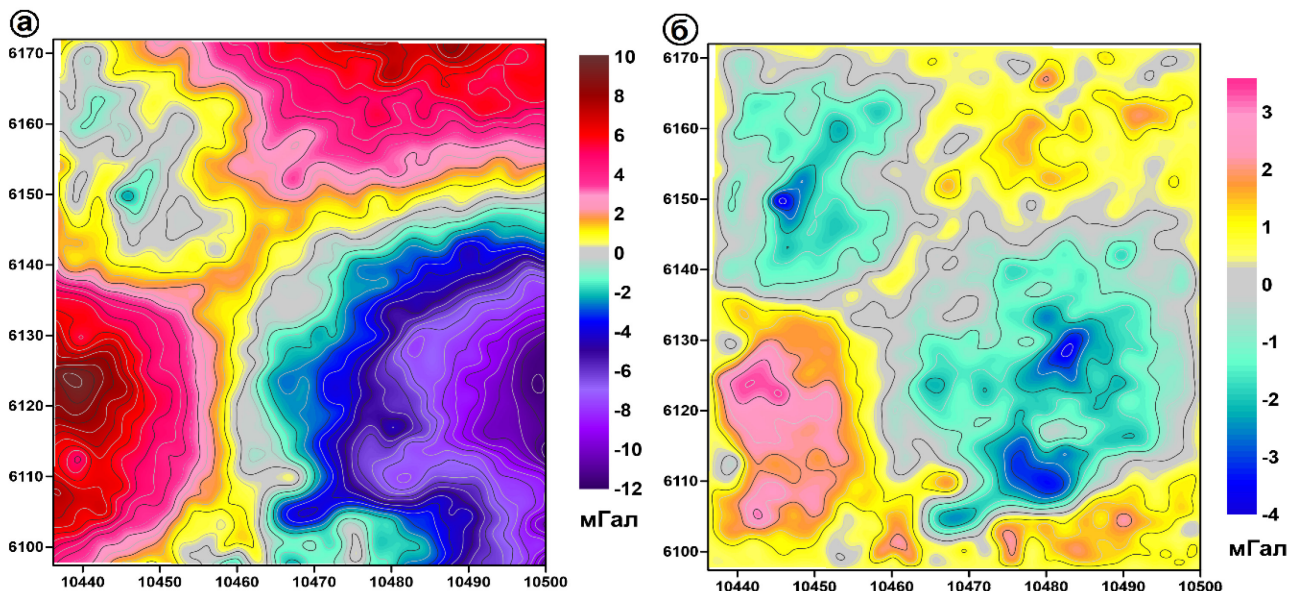


Рисунок 23. Карта аномалий гравитационного поля исследуемого участка. а) Вертикальная компонента гравитационного поля в редукции Буге для исследуемой территории. Пространственные координаты даны в километрах для 10 зоны проекции Гаусса-Крюгера; б) «Локализованные» аномалии поля с исключенным влиянием боковых источников, расположенных вне границ исследуемой области.

5.2 Аппроксимация гравитационных аномалий полями материальных отрезков

Если подобрать распределение сингулярных источников, которые с достаточной точностью соответствуют заданному полю, то гравитационный

эффект от некоторого горизонтального слоя можно принять равным полю источников, расположенных между соответствующими глубинами. В связи с этим был разработан алгоритм аппроксимации гравитационных аномалий полями линейных отрезков для трехмерного случая. Материальные отрезки в качестве малопараметрического класса сингулярных источников использовал А. В. Цирульский, он максимально полно исследовал этот вопрос для двумерного случая и частично – для трехмерного [73].

Рассмотрим задачу аппроксимации в следующем виде. Пусть в точках множества $\{(x_j, y_j, z_j)\}_{j=1}^M$ заданы значения g вертикальной компоненты гравитационного поля, создаваемого некоторым ограниченным телом переменной плотности. Требуется приблизить данное поле при помощи набора сингулярных источников. В качестве сингулярных источников рассматриваем материальные отрезки конечной длины с постоянной линейной плотностью. Каждый отрезок из набора полностью определяется семью параметрами: координатами вершин и массой.

Формула для вертикальной компоненты гравитационного поля отрезка с декартовыми координатами концов (ξ_1, η_1, ζ_1) , (ξ_2, η_2, ζ_2) в точке (x, y, z) , не лежащей на самом отрезке, находится путем непосредственного интегрирования:

$$g(x, y, z) = \left(\frac{\zeta_1 - z}{|\vec{r}_1|} + \frac{\zeta_2 - z}{|\vec{r}_2|} \right) \frac{\gamma m}{|\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2| + (\vec{r}_1, \vec{r}_2)}, \quad (35)$$

где $\vec{r}_1 = (\xi_1 - x, \eta_1 - y, \zeta_1 - z)$, $\vec{r}_2 = (\xi_2 - x, \eta_2 - y, \zeta_2 - z)$, m – масса отрезка, γ – гравитационная постоянная.

Задача приближения заданного поля сводится к минимизации некоторого функционала F , характеризующего степень близости гравитационных полей – исходного и создаваемого набором отрезков. Такой функционал можно задавать различными способами. Будем использовать следующий вариант определения:

$$F = \sum_{j=1}^M \left(\sum_{i=1}^N g_i(x_j, y_j, z_j) - g(x_j, y_j, z_j) \right)^2,$$

где g_i – поле i -ого отрезка (35), g – аппроксимируемое поле, N – количество используемых отрезков.

Для аппроксимации гравитационных аномалий и минимизации функционала F применим методы, использующие сопряженные направления [72]. В общем виде их можно описать следующим образом. Пусть требуется найти минимум функции $f(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ и на k -ой итерации метода значение аргумента получилось равным $\vec{x}^{(k)}$, а направление поиска – $\vec{p}^{(k)}$. Новое значение $\vec{x}^{(k+1)}$ выбирается поиском минимума f вдоль направления $\vec{p}^{(k)}$: $\alpha^{(k)} = \operatorname{argmin}_{\alpha > 0} f(\vec{x}^{(k)} + \alpha \vec{p}^{(k)})$, $\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \vec{p}^{(k)}$. Одномерный поиск можно выполнять произвольным способом, в работе использовался метод золотого сечения. Следующее направление поиска получают так: $\vec{p}^{(k+1)} = -\nabla f(\vec{x}^{(k+1)}) + \beta^{(k)} \vec{p}^{(k)}$, где $\beta^{(k)}$ – некоторый коэффициент, выбором которого специфицируют методы сопряженных градиентов:

$$\beta^{(k)} = \frac{(\nabla f(\vec{x}^{(k+1)}), \nabla f(\vec{x}^{(k+1)}))}{(\nabla f(\vec{x}^{(k)}), \nabla f(\vec{x}^{(k)}))} - \text{метод Флетчера–Ривса (для квадратичных функций}$$

сходится не более чем за n итераций) [87];

$$\beta^{(k)} = \max \left\{ \frac{(\nabla f(\vec{x}^{(k+1)}), \nabla f(\vec{x}^{(k+1)}) - \nabla f(\vec{x}^{(k)}))}{(\nabla f(\vec{x}^{(k)}), \nabla f(\vec{x}^{(k)}))}, 0 \right\} - \text{метод Поляка–Рибьера [99];}$$

$$\beta^{(k)} = -\frac{(\nabla f(\vec{x}^{(k+1)}), \nabla f(\vec{x}^{(k+1)}) - \nabla f(\vec{x}^{(k)}))}{(\vec{p}^{(k)}, \nabla f(\vec{x}^{(k+1)}) - \nabla f(\vec{x}^{(k)}))} - \text{метод Хестенса–Штифеля [89];}$$

$$\beta^{(k)} = -\frac{(\nabla f(\vec{x}^{(k+1)}), \nabla f(\vec{x}^{(k+1)}))}{(\vec{p}^{(k)}, \nabla f(\vec{x}^{(k+1)}) - \nabla f(\vec{x}^{(k)}))} - \text{метод Дай–Юаня [86].}$$

Для различных функций f тот или иной выбор β будет наилучшим вариантом. В нашем случае, как показала практика, метод Поляка–Рибьера сходил быстрее трех других. При любом выборе β начальное значение $\vec{p}^{(0)}$ принимается равным $-\nabla f(\vec{x}^{(0)})$; кроме того, после каждых n итераций, либо в случае возрастания f вдоль направления $\vec{p}^{(k)}$, нужно произвести «обновление» метода: положить $\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)}$, $\vec{p}^{(k+1)} = -\nabla f(\vec{x}^{(k+1)})$. Условиями остановки итерационного процесса служат: достижение требуемой точности подбора $f(\vec{x}^{(k)}) < \varepsilon_1$, т. к. в нашем случае $F(\{\vec{r}_{1i}, \vec{r}_{2i}, m_i\}_{i=1}^N)$ должно стремиться к 0; длина шага метода два раза подряд была

меньше заданного значения $|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}| < \varepsilon_2$, в такой ситуации метод «топчется на месте»; норма градиента два раза подряд меньше априори заданной погрешности $|\nabla f(\vec{x}^{(k)})| < \varepsilon_3$, т. к. в этом случае метод «находится» около критической точки и в последующих итерациях длина шага будет сопоставима с ε_3 .

Для устойчивой сходимости метода и сохранения физического смысла (например, отрезки не могут располагаться выше поверхности точек измерения поля) решение ищется на выпуклом компактном множестве в рамках заданных постоянных ограничений на параметры $\vec{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Применялся метод проекций [72]: на каждой итерации перед выбором длины шага вместо направления $\vec{p}^{(k)}$ берется его проекция $\vec{p}_\Omega^{(k)}$ на множество допустимых значений, затем $\alpha^{(k)}$ выбирается при дополнительном условии $\vec{x}^{(k+1)} \in \Omega$:

$$\alpha^{(k)} = \min \left\{ \underset{\alpha > 0}{\operatorname{argmin}} f \left(\vec{x}^{(k)} + \alpha \vec{p}_\Omega^{(k)} \right), \max \left\{ \alpha \mid \vec{x}^{(k)} + \alpha \vec{p}_\Omega^{(k)} \in \Omega \right\} \right\}.$$

Приведенный выше метод был реализован в программе на языке Си, которая за счет проведения параллельных вычислений на современных графических процессорах (GPU) NVidia с применением библиотеки CUDA и ее расширения cuBLAS позволила достичь высокой производительности расчетов [7].

При помощи указанной программной реализации был осуществлен подбор 510 материальными отрезками поля локальных аномалий. Устанавливались ограничения на геометрическое расположение отрезков: по латерали они должны были оставаться в пределах целевой области, по глубине – в слое от 0 до 10 км. Начальное положение отрезков в плановой проекции на дневную поверхность устанавливалось по морфологии подбираемых аномалий; масса выбиралась с тем расчетом, чтобы поле от отрезка в двух точках над его концами на дневной поверхности максимально совпадало с измеренным полем в этих точках. На рисунке 24 показаны проекции на дневную поверхность подобранных отрезков и гравитационное поле от них. Относительная невязка подбора поля составила менее 1%.

При подборе наиболее важна прослеженность гравитационных аномалий от источников приповерхностного залегания. Как правило, объем геологической информации именно о приповерхностных источниках достаточно велик. Это позволяет построить хорошее нулевое приближение для задачи подбора. Если аномалия от приповерхностных источников прослежена недостаточно, можно использовать дополнительное требование малого отклонения от нулевого приближения для простейших объектов в верхней части разреза.

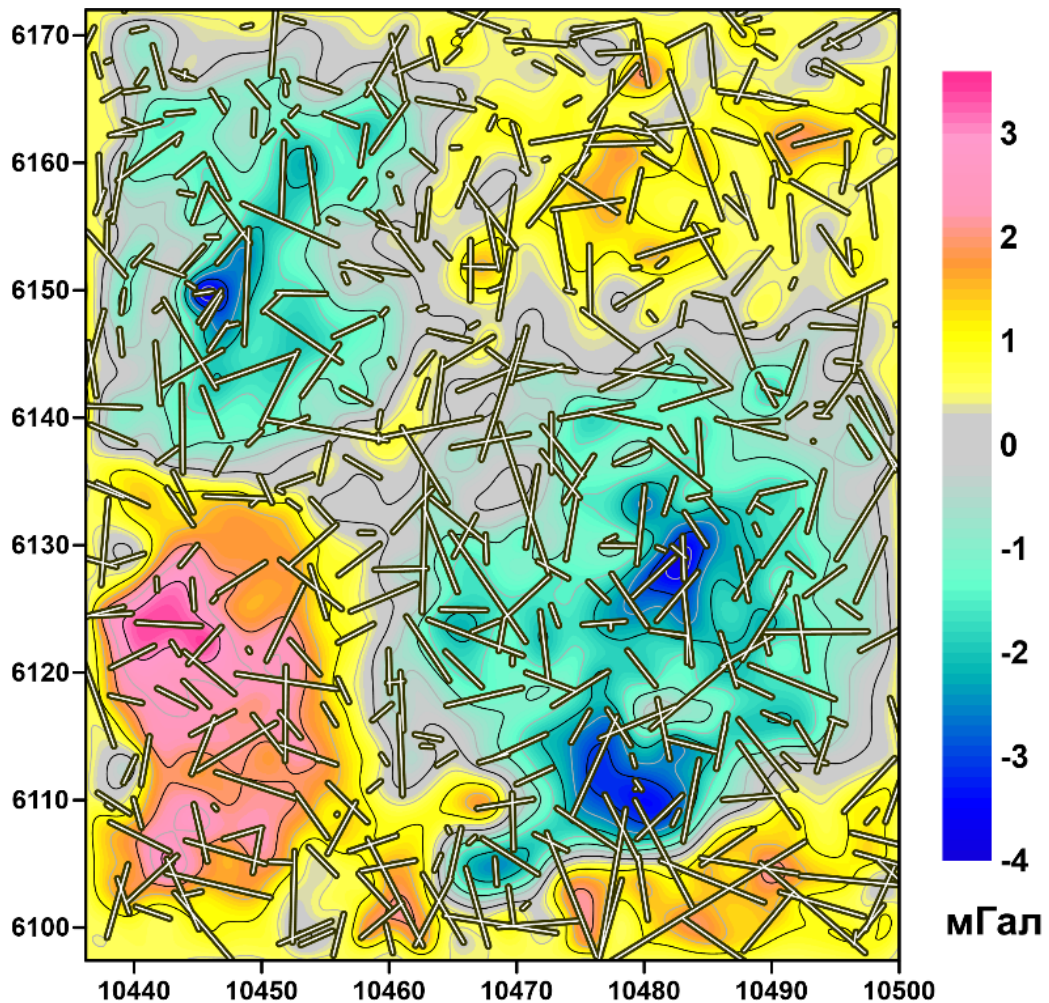


Рисунок 24. Положение подобранных отрезков в проекции на плоскость $z=0$ и создаваемое ими поле.

Поле от приповерхностных структур осадочного комплекса принадлежит «длинноволновой» части гравитационного спектра и качественно напоминает региональное поле глубинных масс. Большая часть этого регионального поля отфильтровывается при решении внутренней задачи Дирихле для небольшой по

размеру площади. Оставшееся часть поля подбирается сингулярными источниками. По пространственному положению подобранных источников создаваемые ими локальные и региональные аномалии разделяются достаточно надежно. Это позволяет из общего подбора выделять локальные объекты аномальных масс и, в той или иной степени, восстанавливать геометрические и плотностные параметры приповерхностных объектов: уверенно – полную массу тела и глубину залегания центра масс; менее надежно – плотность тела и его геометрические размеры (объем).

5.3 Малоуглубинные плотностные модели локальных неоднородностей

Содержательная интерпретация слабоамплитудных аномалий гравитационного поля от приповерхностных структур с локальными включениями плотностных неоднородностей невозможна без адекватного выбора нормального поля, и соответствующей ему, модели неоднородного пласта с криволинейными границами. В частности, в практике поисково-разведочных работ используется типовая плотностная модель неоднородного пласта с криволинейными границами, одна из которых – подошва осадочного слоя. Рельеф подошвы осадочного чехла, равно как и неоднородная плотность пород подстилающего фундамента может полностью замаскировать оценку перспективных аномалий локальных зон на переменном уровне гравитационного фона неоднородного плотностного контакта региональной границы.

Для перехода непосредственно к задаче трехмерного гравитационного моделирования необходимо выбрать закон распределения плотности начальной модели. В качестве таковой принимается кусочно-постоянная плотность, зависящая только от глубины. Устойчивость решения трехмерной обратной задачи гравиметрии для неоднородного пласта вполне обеспечивается в рамках «условно одномерной» модели начального приближения. Ее можно получить или по плотностной региональной модели строения верхней части земной коры, содержащей целевую область, или по данным плотностного каротажа скважин поисково-разведочного бурения. При отсутствии какой-либо априорной информации одномерная зависимость строится методом подбора на базе

истокообразной аппроксимации исходного наблюдаемого (или сглаженного пересчитанного) полей с последующей конвертацией источников аномальных масс в зависящую от глубины одномерную плотность начального приближения. Относительно последней вычисляется избыточная плотность локальных объектов на любой глубине в пределах неоднородной модели криволинейного пласта.

О количественном распределении подобранных отрезков по z координате можно судить по соответствующей гистограмме $\Omega(n)$ (см. рис. 25б). На графике на оси абсцисс отражена доля отрезков (от их общего числа), которые пересекает горизонтальная плоскость, расположенная на глубине, отложенной по оси ординат. По графику можно судить о примерной глубине трехмерной модели. К сожалению, не существует теории эквивалентных решений теоретической обратной задачи и алгоритма восстановления геометрии объемных эквивалентов для трехмерных линейных отрезков. Однако, по сделанному подбору можно рассчитать зависимость средней плотности тонких горизонтальных слоев (одномерное распределение), расположенных на данной глубине. Масса каждого слоя принимается равной суммарной массе частей отрезков, лежащих в этом слое (см. рис. 25а). Данная зависимость выбирается в качестве плотности «нормальной» модели (относительно значения $2,6 \text{ г/см}^3$) для дальнейшего использования при решении линейной обратной задачи.

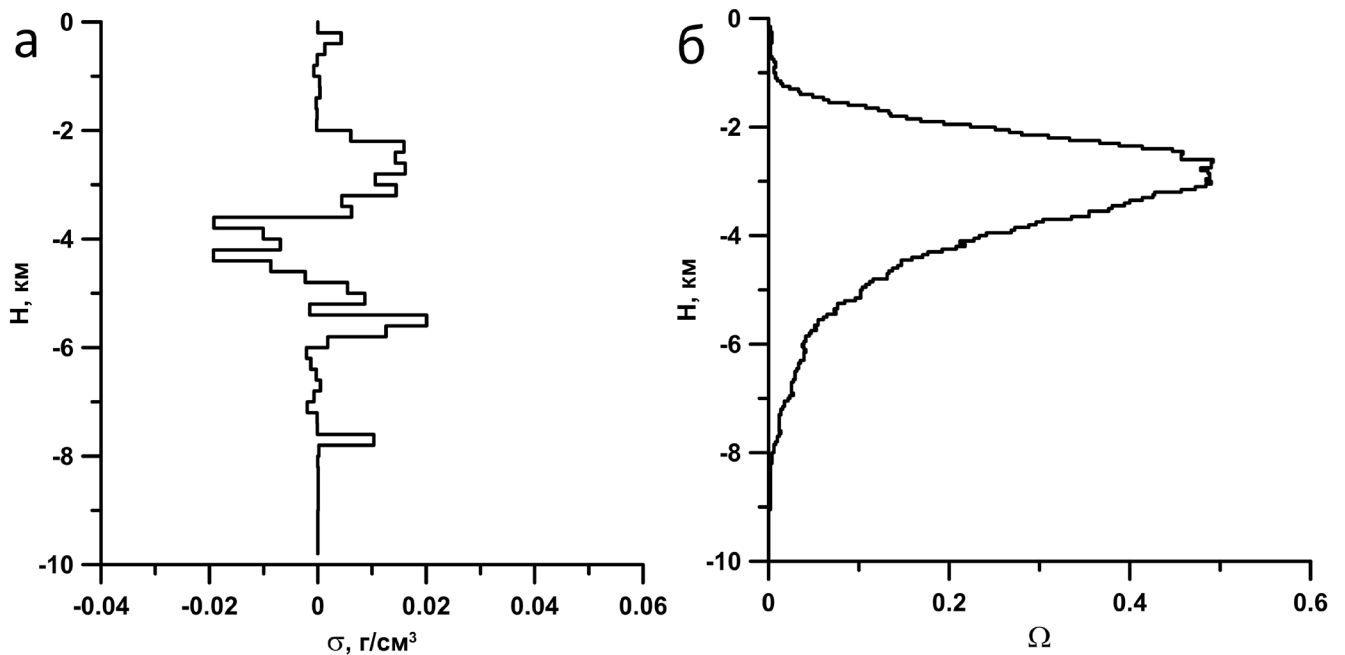


Рисунок 25. Распределение по глубине параметров истокообразной аппроксимации: а) средняя плотность отрезков б) гистограмма количественного распределения отрезков.

Отметим, что применение алгоритма подбора для восстановления одномерной (усредненной) плотности в пределах выделенного участка всего лишь вынужденная мера, оправданная отсутствием какой-либо дополнительной информации. Несмотря на его универсальность это требует большого количества вычислений, а результат (см. рис. 25а) может оказаться неадекватным реальным условиям геологического строения в окрестности поискового объекта. Более перспективны прямые измерения плотности (данные плотностного каротажа) по разрезу скважин разведочного бурения. Объемные плотностные модели, опирающиеся на первичные данные измерений по скважинам, обладают большей практической значимостью и могут применяться для обоснования места проведения поисково-разведочных работ в окрестности перспективных участков.

По локальной составляющей наблюдаемого поля (рис. 23б) подберем распределение плотности для модели до глубины 8 км распространения отрезков (рис. 25). Воспользуемся методом локальных поправок из предыдущей главы. В качестве $\rho_0(z)$ выберем распределение средней плотности отрезков по глубине

(рис. 25а). На рисунках 26 и 27 представлены внешний вид и горизонтальный срез плотностной модели, подобранной без использования аппарата разделения поля: линейная обратная задача решалась сразу для всего слоя $(-8;0]$ км. Погрешность подбора поля меньше 1%.

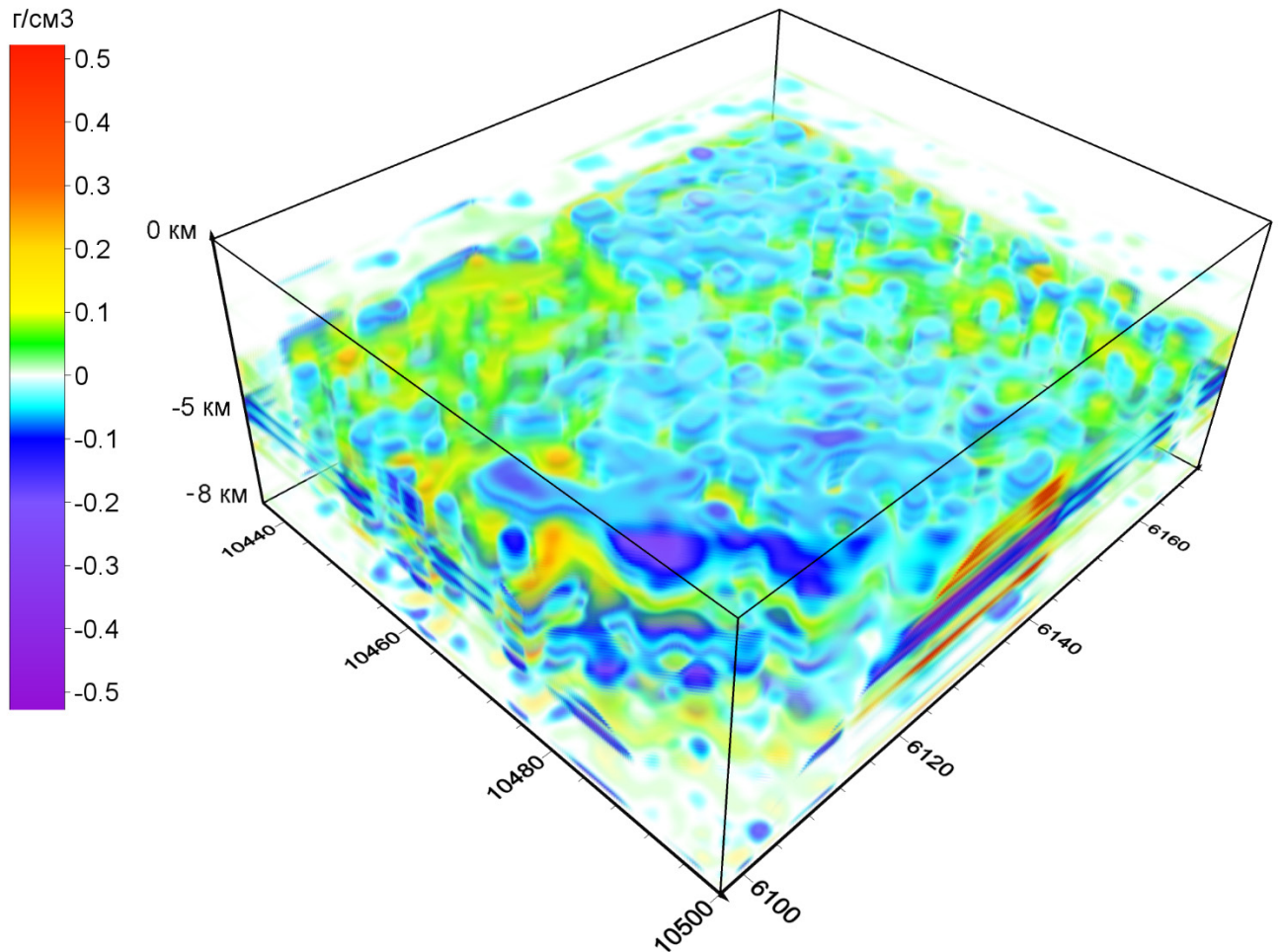


Рисунок 26. Трехмерная плотностная модель (плотность указана относительно среднего значения $2,6 \text{ г/см}^3$), подобранная с использованием истокообразной аппроксимации локальной составляющей наблюдаемого поля. Выполнен срез наклонной плоскостью. Диапазон $[-0.01;0.01] \text{ г/см}^3$ относительной плотности отображается полностью прозрачным.

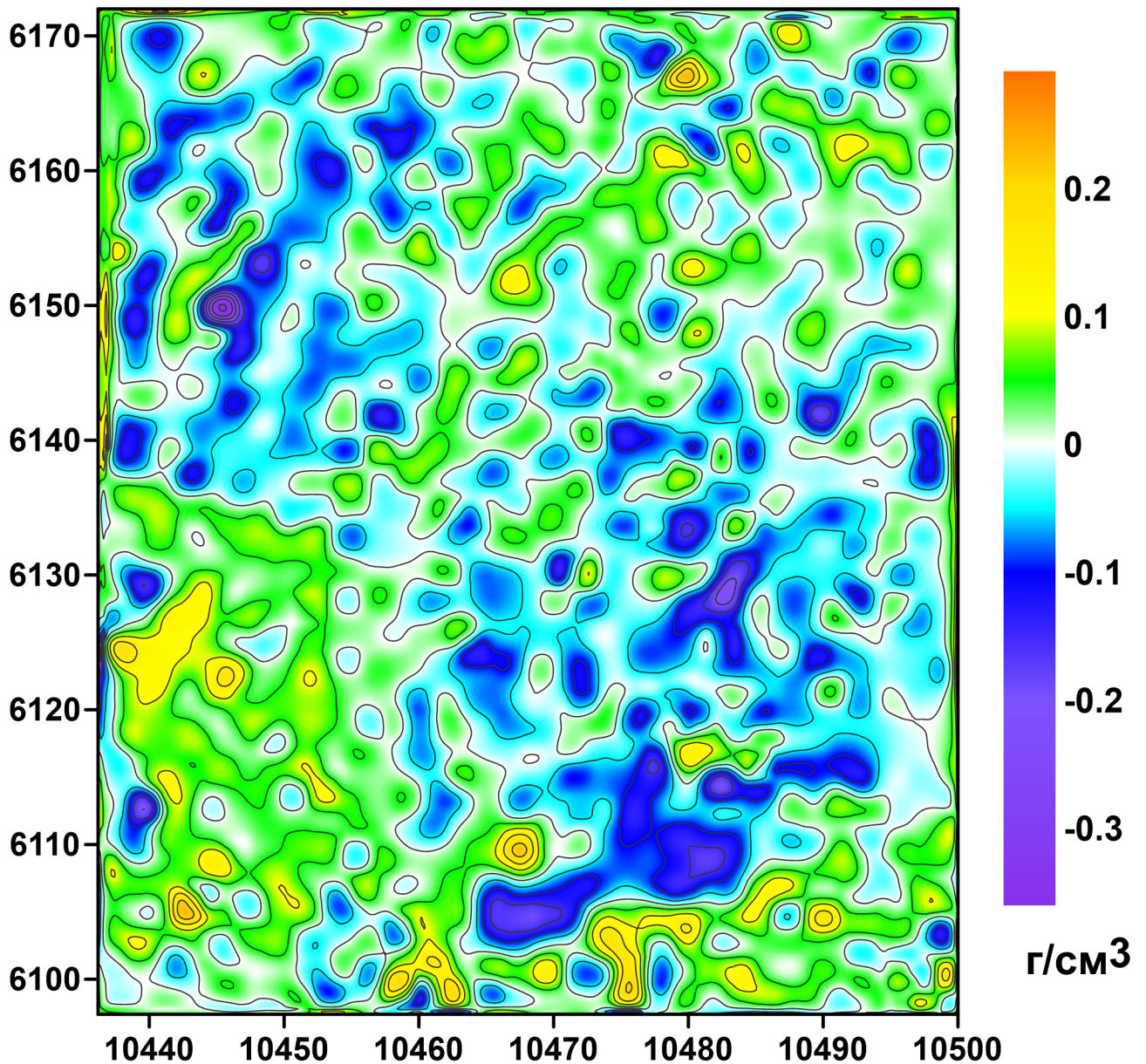


Рисунок 27. Горизонтальный срез для глубины 3 км трехмерной плотностной модели (плотность указана относительно среднего значения $2,6 \text{ г/см}^3$), подобранной с использованием истокообразной аппроксимации локальной составляющей наблюдаемого поля.

Далее посмотрим, как изменится модель при независимом послойном решении линейной обратной задачи по набору полей, полученных при помощи аппарата разделения полей из предыдущей главы. Разделим локальную составляющую наблюдаемого поля (рис. 23б), шаг дискретизации по глубине выберем 200 м, нижнюю границу – 10 км. На рисунке 28 представлен «куб

разделенных полей»: каждый его горизонтальный срез есть поле, которое мы ставим в соответствие слою, расположенному между ближайшими к глубине среза глубинами дискретизации. То есть, например, срез на глубине 2,9 км (равно как на любой другой глубине в интервале $(-3.0; -2.8)$ км) соответствует полю слоя между глубинами 2,8 км и 3 км. На рисунке 29 приведено поле слоя $(-1; -0.8]$ км.

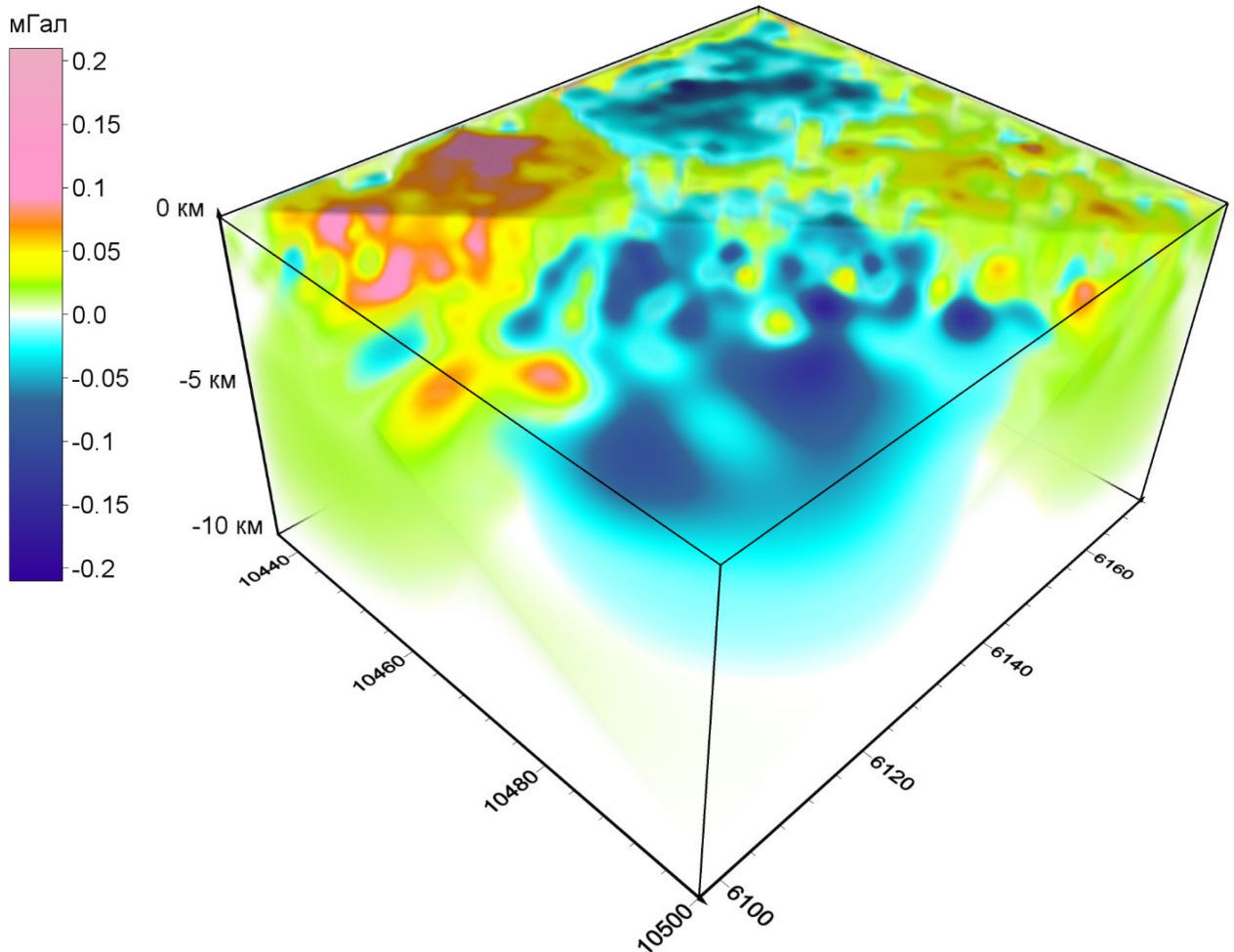


Рисунок 28. «Куб разделенных полей» для локальной составляющей наблюдаемого поля. Выполнен срез наклонной плоскостью. Диапазон $[-0.005; 0.005]$ мГал отображается полностью прозрачным.

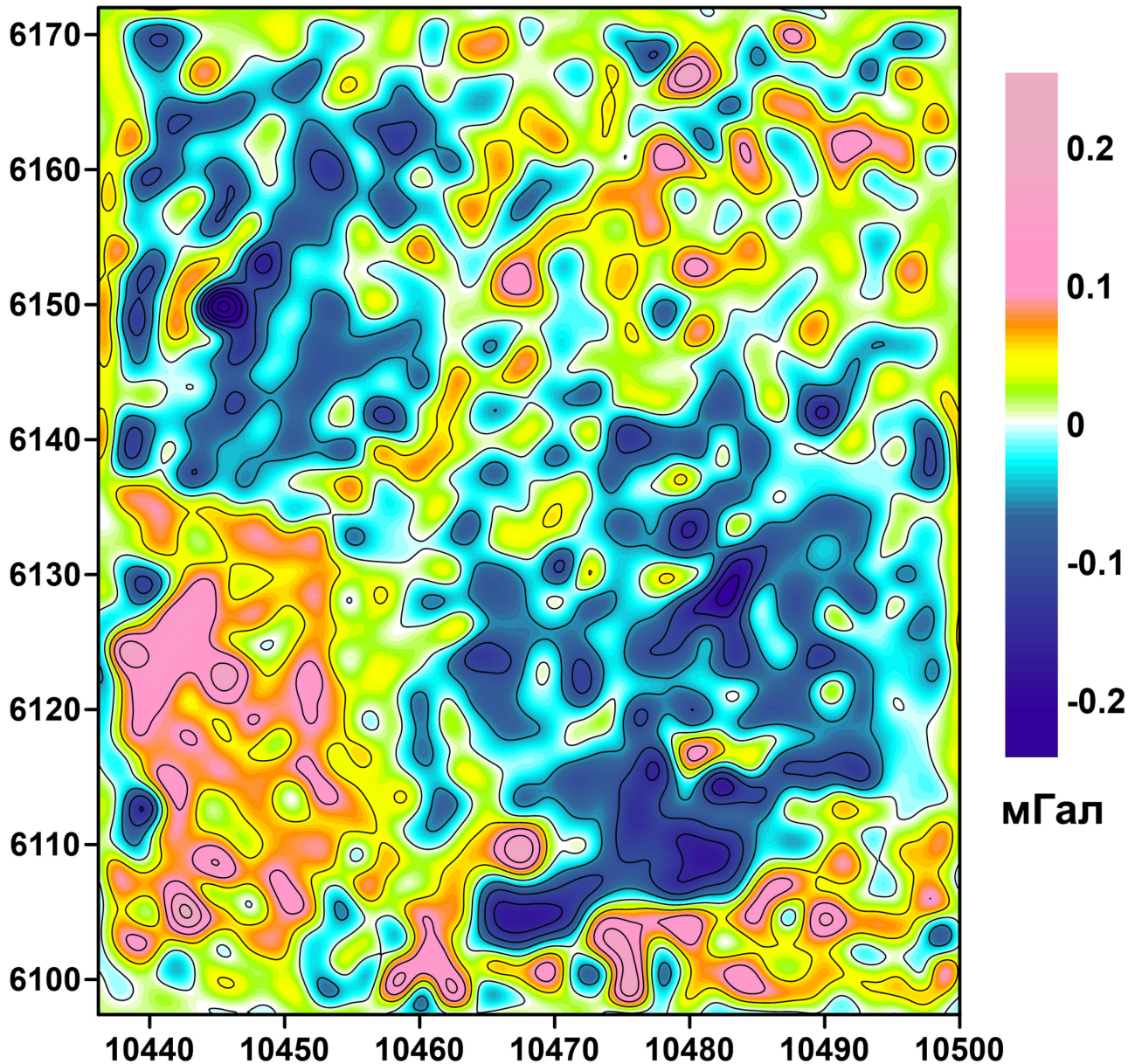


Рисунок 29. Поле, выделенное при помощи аппарата разделения полей, для слоя $(-1; -0.8]$ км.

Для каждого слоя по соответствующему разделенному полю независимо решаем линейную обратную задачу методом локальных поправок, используем $\rho_0(z) \equiv 1 \text{ г/см}^3$. На рисунках 30 и 31 представлены внешний вид и горизонтальный срез плотностной модели, подобранной с использованием аппарата разделения поля. Погрешность подбора поля меньше 1%.

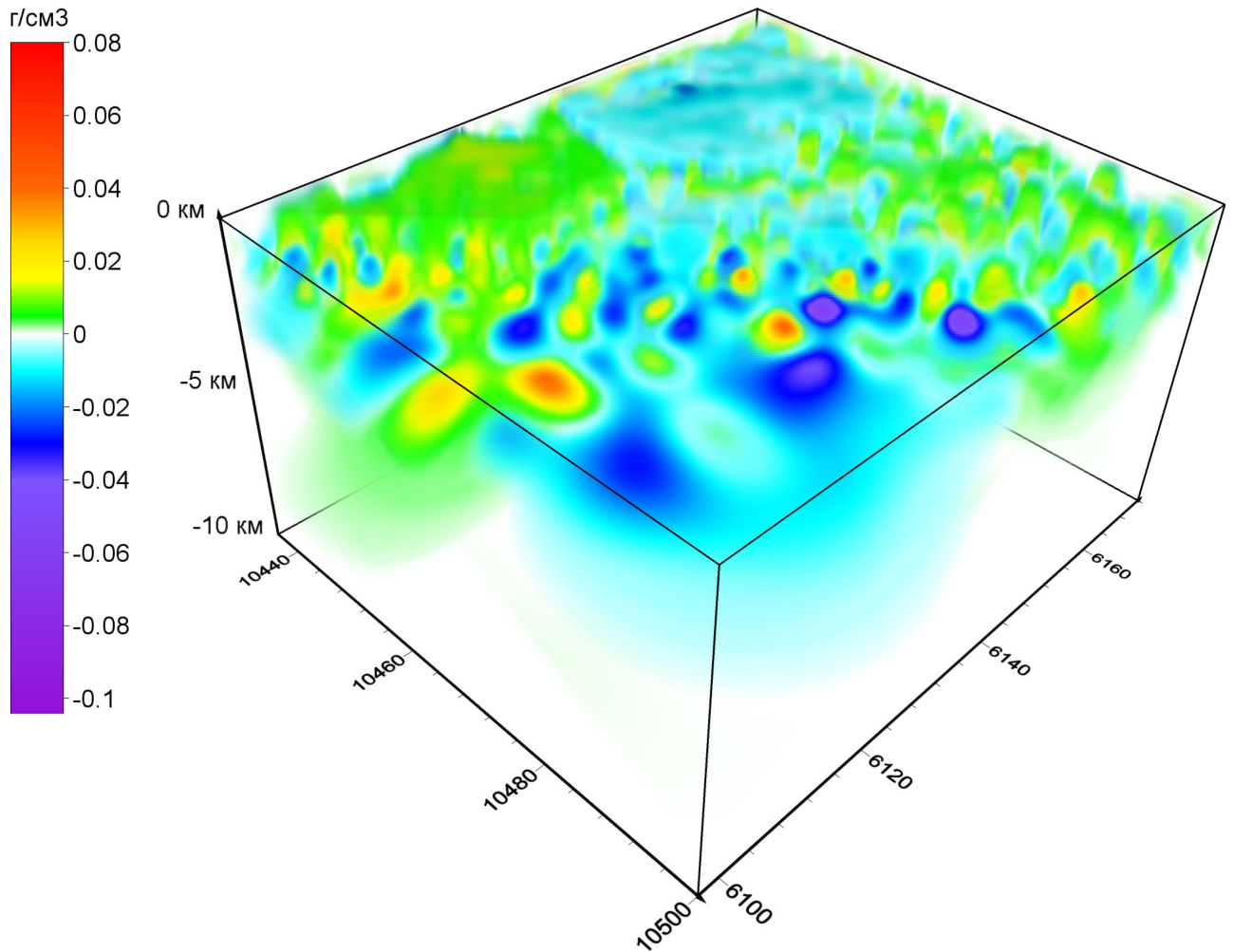


Рисунок 30. Трехмерная плотностная модель (плотность указана относительно среднего значения $2,6 \text{ г/см}^3$), подобранная с использованием разделения локальной составляющей наблюдаемого поля по глубине. Выполнен срез наклонной плоскостью. Диапазон $[-0.001; 0.001] \text{ г/см}^3$ относительной плотности отображается полностью прозрачным.

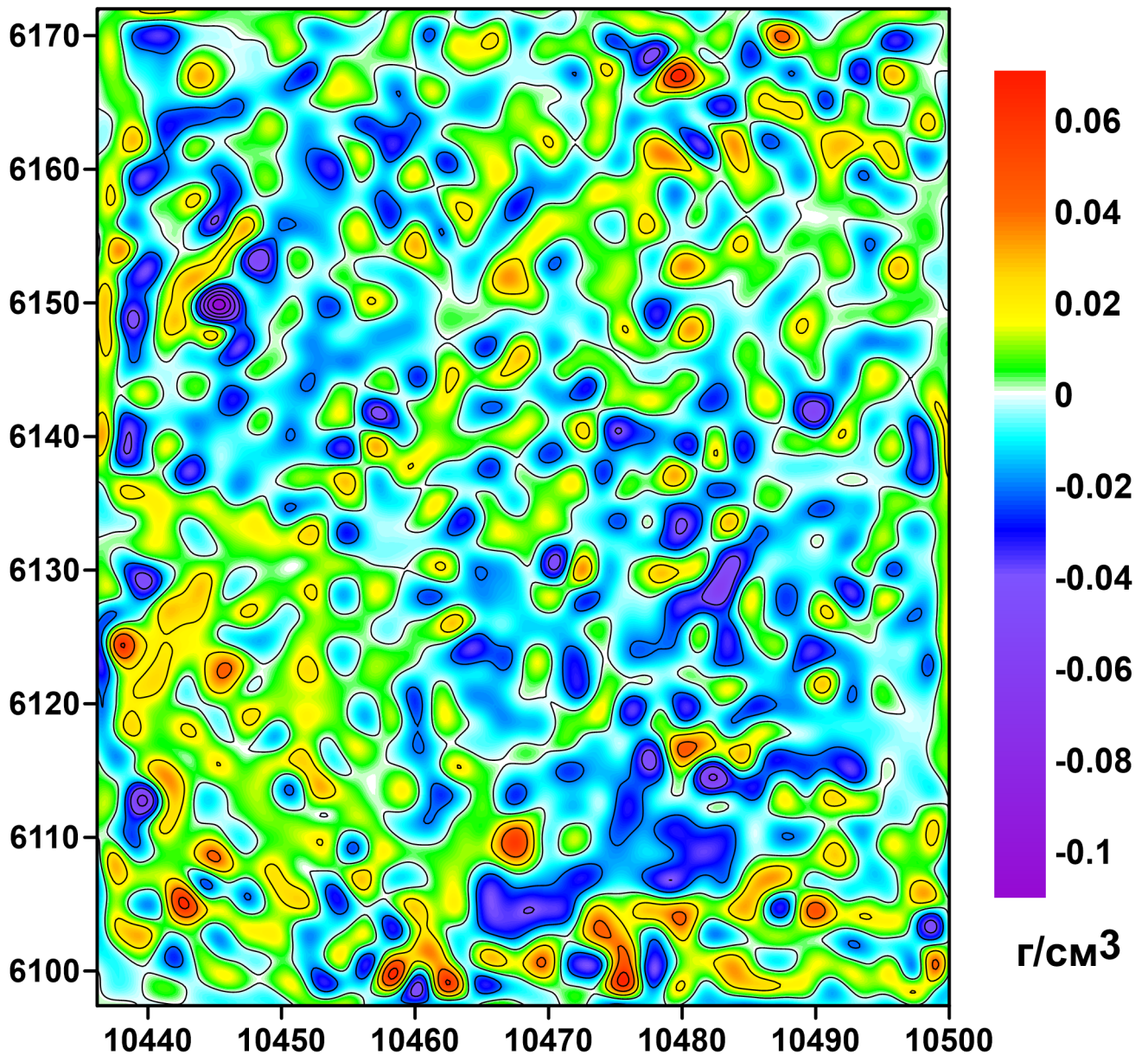


Рисунок 31. Горизонтальный срез для глубины 900 м трехмерной плотностной модели (плотность указана относительно среднего значения $2,6 \text{ г/см}^3$), подобранной с использованием разделения локальной составляющей наблюдаемого поля по глубине.

5.4 Выводы по главе

Сравнивая две модели (рис. 26 и 30), полученные по различным методикам без использования априорной информации, следует отметить их явное различие, хотя локальная составляющая наблюдаемого поля подобралась в обоих случаях одинаково хорошо. Этот факт еще раз говорит о том, что гравитационное

моделирование без использования априорных данных и в отрыве от других методов геофизики может давать существенно отличающиеся результаты в зависимости от применяемой методики построения моделей. В данной главе приведен способ гравитационного моделирования, основанный на решении линейной обратной задачи гравиметрии, который, как видим, в тех или иных вариациях также приводит к различным плотностным моделям.

Использование плотностной модели начального приближения, оригинальных быстрых алгоритмов решения задач гравиметрии на сетках большой размерности (с применением параллельных вычислений) позволяет рассчитывать крупномасштабные плотностные модели. По результатам численного моделирования можно построить объёмную (градиентную) модель послойного распределения избыточной плотности в неоднородном слое и в рамках полученного решения восстановить зоны локальных неоднородностей.

Физически содержательное наполнение решения сильно зависит от выбора модели начального приближения. Чем больше имеется априорной информации о распределении плотности в исследуемой области (например, по скважинам), тем точнее трехмерная модель распределения плотности будет соответствовать реальности. Прямые измерения плотности (данные плотностного каротажа) по разрезу скважин разведочного бурения более предпочтительны для оценочной проверки результатов математического моделирования. Объёмные плотностные модели, опирающиеся на первичные данные измерений по скважинам, обладают большей практической значимостью и могут применяться для обоснования места проведения поисково-разведочных работ в окрестности перспективных участков.

Заключение

Основные результаты, полученные в работе, состоят в следующем. Предложена методика количественной интерпретации гравитационного поля на основе комплекса вычислительно эффективных параллельных алгоритмов решения трехмерных задач на сетках большой размерности.

Разработан быстрый алгоритм для точного вычисления гравитационного поля от модели с кусочно-постоянным распределением плотности на равномерной сетке. Он имеет меньшую вычислительную сложность, чем расчет по «явной» формуле, а созданное на его основе программное обеспечение использует на порядок меньше ресурсов процессора и памяти, что продемонстрировано на синтетических моделях с разным числом элементов разбиения. Многопоточная программная реализация алгоритма для GPU с поддержкой CUDA применялась на практике для расчетов полей от плотностных региональных моделей и использовалась как важная составная часть метода автоматизированной интерпретации.

При расчетах гравитационного поля от фрагментов трехмерной модели в произвольных криволинейных границах использовалась переменная по глубине плотность относимости («плотность вмещающей среды»). На синтетических и практических примерах показано, что такая плотность уменьшает амплитуды редуцированных аномалий поля, по сравнению с постоянной по глубине плотностью, и позволяет корректно сопоставлять гравитационные аномалии от неоднородных частей плотностной модели с произвольными криволинейными границами.

Разработан алгоритм решения линейной обратной задачи гравиметрии, основанный на идее локализации: поле в каждой точке обусловлено главным образом областью плотностной модели, расположенной ближе всего к этой точке. Соответственно, на каждой итерации метода плотности в модели модифицируются «локально», то есть зависимо только от ближайших точек задания поля. В совокупности с быстрым алгоритмом решения прямой задачи он позволяет находить устойчивые решения обратной задачи в выбранном классе моделей.

Параллельная программная реализация метода для GPU позволяет решать обратную задачу для моделей с количеством элементов разбиения порядка $1e6$ практически в реальном времени.

Предложен вычислительно эффективный алгоритм расчета интеграла Пуассона для представления гармонических функций во «внешнем» полупространстве по их граничным значениям на плоскости. Также разработан алгоритм для решения обратной задачи: аналитического продолжения гармонических функций с плоскости во «внутреннее» полупространство. Он основан на решении интегрального уравнения Фредгольма 1-ого рода модифицированным методом локальных поправок с регуляризацией. В совокупности оба алгоритма позволяют разделять гравитационное поле по глубине на составляющие, относимые к горизонтальным слоям модели на соответствующих глубинах. На практическом примере регионального моделирования показано, как меняются результаты решения линейной обратной задачи с применением разделения поля и без него.

Методы пересчетов и решения линейной обратной задачи гравиметрии применены к построению крупномасштабной модели приповерхностного слоя земной коры для территории 70×60 км². Показаны два варианта интерпретации: без использования начальной модели с послойным разделением наблюдаемого поля и последующим подбором плотностей в соответствующих слоях; и без разделения поля, но с использованием начальной модели, полученной путем подбора наблюдаемого поля сингулярными источниками (отрезками) с последующим «рассеянием» их масс по тонким горизонтальным слоям.

Все предложенные алгоритмы были реализованы в программном обеспечении, использующем технологии Nvidia CUDA и AMD ROCm для вычисления на высокопроизводительных графических ускорителях.

Литература

1. **Алексидзе, М. А.** Решение некоторых основных задач гравиметрии / М. А. Алексидзе. – Тбилиси: Мецниереба, 1985. – 411 с.
2. **Алексидзе, М. А.** Приближенные методы решения прямых и обратных задач гравиметрии / М. А. Алексидзе. – М.: Наука, 1987. – 334 с.
3. **Артемьев, М. Е.** Опыт разделения гравитационного поля на составляющие, обусловленные плотностными неоднородностями разной глубинности (на примере Северной Атлантики и Средиземноморья) / М. Е. Артемьев, Т. М. Бабаева, И. Е. Войдецкий, В. О. Михайлов // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1985. – № 1. – С. 44–52.
4. **Бабаянц, П. С.** Применение пакета программ структурной интерпретации СИГМА-3D при изучении подводных вулканов Курильской островной дуги / П. С. Бабаянц, Ю. И. Блох, В. И. Бондаренко, В. А. Рашидов, А. А. Трусков // Вестник Камчатской региональной организации учебно-научный центр. Серия: науки о земле. – 2005. – № 2 (6). – С. 67-76.
5. **Бабаянц, П. С.** Интерактивные технологии локальной количественной экспресс-интерпретации потенциальных полей / П. С. Бабаянц, Ю. И. Блох, А. А. Трусков // Геофизика. – 2006. – № 1. – С. 56-58.
6. **Бызов, Д. Д.** О способе построения плотностных моделей слоисто-неоднородных сред / Д. Д. Бызов, В. В. Колмогорова, И. В. Ладовский, П. С. Мартышко, А. Г. Цидаев // Уральский геофизический вестник. – 2015. – № 1 (25). – С. 24-32.
7. **Бызов, Д. Д.** Вычисление вертикальной компоненты геомагнитного поля с помощью аппроксимации его модуля системой намагниченных отрезков / Д. Д. Бызов, Л. А. Муравьев // Уральский геофизический вестник. – 2015. – № 2 (26). – С. 24-28.
8. **Бычков, С. Г.** Методы обработки и интерпретации гравиметрических наблюдений при решении задач нефтегазовой геологии / С. Г. Бычков. – Екатеринбург: Горный институт УрО РАН, 2010. – 187 с.

9. **Галуев, В. И.** Программно-алгоритмическое обеспечение многоатрибутного анализа геополей и результаты его применения / В. И. Галуев, В. Е. Федотов, Д. П. Земцова, А. А. Никитин // Геоинформатика. – 2013. – № 2. – С. 1–5.
10. **Глазнев, В. Н.** Плотностное моделирование земной коры центральной части Восточно-Европейской платформы / В. Н. Глазнев, М. В. Минц, О. М. Муравина // Вестник Камчатской региональной организации Учебно-научный центр. Серия Науки о Земле. – 2016. - № 1(29). – С. 53-63.
11. **Гордин, В. М.** О конструировании вычислительных схем для трансформаций потенциальных полей / В. М. Гордин // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1974. – № 3. – С. 40–50.
12. **Гордин, В. М.** Применение критерия Колмогорова-Винера при решении задач фильтрации и разделения геофизических аномалий / В. М. Гордин, В. О. Михайлов // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1977. – № 2. – С. 48–63.
13. **Гордин, В. М.** Физические аспекты аппроксимации и фильтрации аномальных полей / В. М. Гордин, В. О. Михайлов, Б. О. Михайлов // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1980. – № 1. – С. 78–93.
14. **Гравirazведка.** Справочник геофизика / Под ред. Е. А. Мудрецово́й, К. Е. Веселова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1990. – 607 с.
15. **Дружинин, В. С.** Разработка методики объемного моделирования верхней части литосферы Урала / В. С. Дружинин, Ю. С. Каретин, Н. И. Начапкин, А. Н. Бахвалов // Уральский геофизический вестник. – 2000. – № 1. – С. 56–60.
16. **Дружинин, В. С.** Использование результатов геофизических исследований на региональных профилях для глубинного геокартирования / В. С. Дружинин, Ю. С. Каретин, Н. И. Начапкин, А. И. Бахвалов // Разведка и охрана недр. – 2000. – № 2. – С. 2–6.
17. **Дружинин, В. С.** Строение верхней части литосферы и нефтегазоносность недр Уральского региона / В. С. Дружинин, П. С. Мартышко, Н. И. Начапкин, В. Ю. Осипов. – Екатеринбург: ИГФ УрО РАН, 2014. – 226 с. – ISBN 978-5-7691-2399-3.

18. **Егорова, Т. П.** Строеие литосферы Черного моря по результатам 3D гравитационного анализа и сейсмической томографии / Т. П. Егорова, Б. С. Гобаренко, Т. Б. Яновская, К. П. Баранова // Геофизический журнал. – 2012. – Т. 34, № 5. – С. 38–59.
19. **Егорова, Т. П.** Сейсмо-плотностные модели земной коры и верхней мантии северной Евразии по сверхдлинным сейсмическим профилям “Кварц”, “Кратон” и “Кимберлит” / Т. П. Егорова, Г. А. Павленкова // Физика Земли. – 2015. – № 2. – С. 98–115. – DOI 10.7868/S0002333715010044.
20. **Картвелишвили, К. М.** Планетарная плотностная модель и нормальное гравитационное поле Земли / К. М. Картвелишвили. – М.: Наука, 1982. – 95 с.
21. **Керимов, И. А.** Применение программного комплекса "КОСКАД 3D" для анализа потенциальных полей Терско-Каспийского прогиба / И. А. Керимов, А. В. Петров, Э. А. Абубакарова // Известия Дагестанского государственного педагогического университета. Естественные и точные науки. – 2018. – Т. 12, № 3. – С. 88–96. – DOI 10.31161/1995-0675-2018-12-3-88-96.
22. **Куприенко, П. Я.** Трехмерная плотностная модель земной коры и верхней мантии Украинского щита / П. Я. Куприенко, И. Б. Макаренко, В. И. Старостенко, О. В. Легостаева // Геофизический журнал. – 2007. – Т. 29, № 5. – С. 3–27.
23. **Куприенко, П. Я.** Трехмерная плотностная модель земной коры и верхней мантии Днепровско-Донецкой впадины и Донбасса / П. Я. Куприенко, И. Б. Макаренко, В. И. Старостенко, О. В. Легостаева, А. С. Савченко // Геофизический журнал. – 2010. – Т. 32, № 6. – С. 175–214.
24. **Лаврентьев, М. М.** Некорректные задачи математической физики и анализа / М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. П. Шишатский. – М.: Наука, 1980. – 285 с.
25. **Ладовский, И. В.** Опыт построения трехмерной сейсмоплотностной модели по скоростным разрезам ГСЗ / И. В. Ладовский, П. С. Мартышко, Н. В. Федорова, В. В. Колмогорова // Уральский геофизический вестник. – 2016. – № 2. – С. 108–120.

26. **Ладовский, И. В.** О выборе избыточной плотности при гравитационном моделировании неоднородных сред / И. В. Ладовский, П. С. Мартышко, Д. Д. Бызов, В. В. Колмогорова // Физика Земли. – 2017. – № 1. – С. 138–147.
27. **Маловичко, А. К.** Методы аналитического продолжения аномалий силы тяжести и их приложения к задачам гравиразведки / А. К. Маловичко. – М.: Гостоптехиздат, 1956. – 160 с.
28. **Мартышко, П. С.** Технология разделения источников гравитационного поля по глубине / П. С. Мартышко, И. Л. Пруткин // Геофизический журнал. – 2003. – Т. 25, № 3. – С. 159–168.
29. **Мартышко, П. С.** Об определении плотности в слоистой среде по гравитационным данным / П. С. Мартышко, Д. Е. Кокшаров // Геофизический журнал. – 2005. – Т. 27, № 4. – С. 678–684.
30. **Мартышко, П. С.** Построение региональных геофизических моделей на основе комплексной интерпретации гравитационных и сейсмических данных / П. С. Мартышко, И. В. Ладовский, А. Г. Цидаев // Физика Земли. – 2010. – № 11. – С. 23–35.
31. **Мартышко, П. С.** Методика и результаты создания объемной геолого-геофизической модели верхней части литосферы северного и среднего сегментов Уральского региона / П. С. Мартышко, В. С. Дружинин, Н. И. Начапкин, В. Ю. Осипов, Н. В. Фёдорова, И. В. Ладовский, В. В. Колмогорова, А. Г. Цидаев. // Динамика физических полей Земли. – М.: ИФЗ РАН, 2011. – С. 9–30.
32. **Мартышко, П. С.** Применение сеточных функций в задачах трехмерного плотностного моделирования / П. С. Мартышко, И. В. Ладовский, В. В. Колмогорова, А. Г. Цидаев, Д. Д. Бызов // Уральский геофизический вестник. – 2012. – № 1. – С. 30–34.
33. **Мартышко, П. С.** Применение параллельных алгоритмов вычислений при изучении структуры аномального магнитного поля Урала / П. С. Мартышко, Н. В. Фёдорова, Д. В. Гемайдинов // Доклады Академии Наук. – 2012. – Т. 446, № 2. – С. 201–203.

34. **Мартышко, П. С.** Методика и новые сеточные алгоритмы построения 3d плотностных моделей / П. С. Мартышко, И. В. Ладовский, В. Ю. Осипов, Д. Д. Бызов, А. Г. Цидаев // Геофизика. – 2013. – № 1. – С. 41–47.
35. **Мартышко, П. С.** О решении обратной задачи гравиметрии на сетках большой размерности / П. С. Мартышко, И. В. Ладовский, Д. Д. Бызов // Доклады Академии Наук. – 2013. – Т. 450, № 6. – С. 702–707.
36. **Мартышко, П. С.** Изучение структурных особенностей гравитационного и магнитного полей литосферы с использованием параллельных алгоритмов / П. С. Мартышко, Н. В. Федорова, Е. Н. Акимова, Д. В. Гемайдинов // Физика Земли. – 2014. – № 4. – С. 50–55. – DOI 10.7868/S0002333714040097.
37. **Мартышко, П. С.** Об устойчивых методах интерпретации данных гравиметрии / П. С. Мартышко, И. В. Ладовский, Д. Д. Бызов // Доклады Академии Наук. – 2016. – Т. 471, № 6. – С. 725–728.
38. **Мартышко, П. С.** Теория и методы комплексной интерпретации геофизических данных / П. С. Мартышко, И. В. Ладовский, Н. В. Федорова, Д. Д. Бызов, А. Г. Цидаев // – Екатеринбург: УрО РАН, 2016. – 94 с. – ISBN 978-5-7691-2463-1.
39. **Минц, М. В.** Глубинное строение коры юго-востока Воронежского кристаллического массива по геофизическим данным: геодинамическая эволюция в палеопротерозое и современное состояние коры / М. В. Минц, В. Н. Глазнев, О. М. Муравина // Вестник Воронежского государственного университета. Серия Геология. - 2017. - № 4. - С. 5-23.
40. **Муравина, О. М.** Петрофизическая характеристика осадочного чехла Воронежской антеклизы / О. М. Муравина, В. И. Жаворонкин, В. Н. Глазнев // Вестник Воронежского государственного университета. Серия Геология. - 2013. – № 1. – С. 189-196.
41. **Никитин, А. А.** Возможности ГИС ИНТЕГРО-Геофизика при определении глубинных геофизических критериев регионального прогноза УВ / А. А. Никитин, Е. Н. Черемисина, В. И. Галуев // Геофизика. – 2010. – № 2. – С. 3–11.

42. **Новоселицкий, В. М.** К теории определения изменения плотности в горизонтальном пласте по аномалиям силы тяжести / В. М. Новоселицкий // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1965. – № 5. – С. 25–32.
43. **Павленкова, Н. И.** Трехмерная плотностная модель литосферы Европы / Н. И. Павленкова, Т. П. Егорова, В. И. Старостенко, В. Г. Козленко // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1991. – № 4. – С. 3–23.
44. **Пашкевич, И. К.** Трехмерная геолого-геофизическая модель литосферы центральной части Карельского кратона / И. К. Пашкевич, Н. В. Шаров, А. С. Савченко, В. И. Старостенко // Геофизический журнал. – 2014. – Т. 36, № 6. – С. 58–78.
45. **Пашкевич, И. К.** Трехмерная геофизическая модель земной коры центральной части Карельского кратона / И. К. Пашкевич, А. С. Савченко, В. И. Старостенко, Н. В. Шаров // Доклады Академии Наук. – 2015. – Т. 463, № 4. – С. 469–473. – DOI 10.7868/S086956521522020X.
46. **Пашкевич, И. К.** Строение литосферы по комплексному анализу геолого-геофизических данных вдоль профиля DOBREFraction'99/DOBRE-2 (Восточно-Европейская платформа - Восточно-Черноморская впадина) / И. К. Пашкевич, О. М. Русаков, Р. И. Кутас, Д. Н. Гринь, В. И. Старостенко, Т. Яник // Геофизический журнал. – 2018. – Т. 40, № 5. – С. 98–136. – DOI 10.24028/gzh.0203-3100.v40i5.2018.147476.
47. **Петров, А. В.** Компьютерная технология статистического и спектральнокорреляционного анализа данных КОСКАД 3D и практические результаты / А. В. Петров, Г. В. Демура, С. В. Зиновкин // Недропользование XXI век. – 2017. – № 1 (64). – С. 44–59.
48. **Петровский, А. П.** Быстрый алгоритм решения прямой задачи гравиметрии / А. П. Петровский, Т. А. Федченко, В. Н. Суятинов // Геофизический журнал. – 2007. – Т. 29, № 2. – С. 141–145.
49. **Пиманова, Н. Н.** Распределение плотностных неоднородностей в земной коре и мантии юго-восточной части Фенноскандинавского щита по комплексу геолого-

- геофизических данных / Н. Н. Пиманова, В. А. Спиридонов, Н. В. Шаров, А. В. Любимова, А. Е. Сеннер // Геоинформатика. – 2018. – № 1. – С. 43–51.
50. **Пиманова, Н. Н.** Трехмерное плотностное моделирование земной коры юго-восточной части Фенноскандинавского щита в ГИС Integro / Н. Н. Пиманова, В. А. Спиридонов, Н. В. Шаров, С. В. Мицын // Геоинформатика. – 2019. – № 1. – С. 24–35.
51. **Простолупов, Г. В.** Об интерпретации гравитационного и магнитного полей на основе трансформации горизонтальных градиентов в системе «VECTOR» / Г. В. Простолупов, В. М. Новоселицкий, В. Н. Конешов, Г. П. Щербинина // Физика Земли. – 2006. – № 6. – С. 90–96.
52. **Пруткин, И. Л.** О решении трехмерной обратной задачи гравиметрии в классе контактных поверхностей методом локальных поправок / И. Л. Пруткин // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1986. – № 1. – С. 67–77.
53. **Романюк, Т. В.** Сейсмоплотностное моделирование коры и верхней части мантии вдоль геотраверса «КВАРЦ» / Т. В. Романюк // Физика Земли. – 1995. – № 9. – С. 11–23.
54. **Романюк, Т. В.** Плотностная модель субдукционной зоны / Т. В. Романюк, В. Д. Муни, Р. Дж. Блэкли // Физика Земли. – 2001. – № 8. – С. 3–22.
55. **Романюк, Т. В.** Модели распределения плотности литосферы вкост разлома Сан-Андреас / Т. В. Романюк, В. Д. Муни, Ш. Детвейлер // Физика Земли. – 2003. – № 5. – С. 18–46.
56. **Сербуленко, М. Г.** Линейные методы разделения потенциальных полей / М. Г. Сербуленко // Курс гравиразведки и магниторазведки (специальные главы) / Под ред. чл.-кор. АН СССР Э. Э. Фотиади. – Новосибирск, 1966. – Гл. ?? . – С. 389–457.
57. **Старостенко, В. И.** Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии / В. И. Старостенко. – Киев: «Наукова думка», 1978. – 228 с.
58. **Старостенко, В. И.** Комплекс автоматизированной интерпретации данных потенциальных полей (GMT-Auto) / В. И. Старостенко, О. В. Легостаева,

- И. Б. Макаренко, А. С. Савченко // Геофизический журнал. – 2015. – Т. 37, № 1. – С. 42–52.
59. **Старостенко, В. И.** Интерактивный программный комплекс Isohypse для построения трехмерных геолого-геофизических моделей и его практическое использование / В. И. Старостенко, В. М. Шарыпанов, А. В. Шарыпанов, А. С. Савченко, О. В. Легостаева, И. Б. Макаренко, П. Я. Куприенко // Геофизический журнал. – 2016. – Т. 38, № 1. – С. 30–42. – DOI 10.24028/gzh.0203-3100.v38i1.2016.107720.
60. **Старостенко, В. И.** Трехмерная плотностная модель земной коры центральной части Голованевской шовной зоны Украинского щита / В. И. Старостенко, П. Я. Куприенко, И. Б. Макаренко, А. С. Савченко, О. В. Легостаева // Геофизический журнал. – 2018. – Т. 40, № 3. – С. 27–53. – DOI 10.24028/gzh.0203-3100.v40i3.2018.137172.
61. **Страхов, В. Н.** Некоторые примеры эквивалентности и слабой единственности в плоской обратной задаче потенциала / В. Н. Страхов // Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1973. – № 5. – С. 39–62.
62. **Страхов, В. Н.** Восстановление плотностей земной коры и верхней мантии по данным ГСЗ и гравиметрии / В. Н. Страхов, Т. В. Романюк // Физика Земли. – 1984. – № 6. – С. 44–63.
63. **Страхов, В. Н.** Решение задачи симметризованного аналитического продолжения двумерных потенциальных полей / В. Н. Страхов // Доклады Академии Наук. – 1990. – Т. 312, № 2. – С. 335–339.
64. **Страхов, В. Н.** Метод симметризованного аналитического продолжения двумерных потенциальных полей / В. Н. Страхов // Доклады Академии Наук. – 1990. – Т. 312, № 5. – С. 1087–1091.
65. **Страхов, В. Н.** Основные методы нахождения устойчивых приближенных решений систем линейных алгебраических уравнений, возникающих при решении задач гравиметрии и магнитометрии. I. / В. Н. Страхов, А. В. Страхов. – М.: ОИФЗ РАН, 1999. – 40 с.

66. **Страхов, В. Н.** Основные методы нахождения устойчивых приближенных решений систем линейных алгебраических уравнений, возникающих при решении задач гравиметрии и магнитометрии. II. / В. Н. Страхов, А. В. Страхов. – М.: ОИФЗ РАН, 1999. – 52 с.
67. **Страхов, В. Н.** Аналитическое продолжение и разделение трехмерных потенциальных полей / В. Н. Страхов, И. Э. Степанова // Доклады Академии Наук. – 2000. – Т. 374, № 1. – С. 103–106.
68. **Страхов, В. Н.** Разработка теории и компьютерной технологии построения линейных аналитических аппроксимаций гравитационных и магнитных полей / В. Н. Страхов, И. А. Керимов, И. Э. Степанова. – М.: ИФЗ РАН, 2009. – 254 с.
69. **Тихонов, А. Н.** Уравнения математической физики: Учеб. пособие / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – 6-е изд., испр. и доп. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 799 с.
70. **Тихоцкий, С. А.** Об эквивалентности методов оптимальной фильтрации и истокообразной аппроксимации аномалий потенциальных полей, измеренных на произвольном дискретном множестве точек: теоретические аспекты / С. А. Тихоцкий, Д. Ю. Шур // Вестник камчатской региональной организации учебно-научный центр. Серия: науки о земле. – 2017. – № 4 (36). – С. 113–117.
71. **Фотиади, Э. Э.** Основные черты структуры и динамики литосферы Сибири по геолого-геофизическим данным / Э. Э. Фотиади, Т. Л. Захарова, С. А. Ладынин, С. А. Тычков, Л. А. Шарловская. – Новосибирск: «Наука», Сибирское отделение, 1990. – Выпуск 738. – 116 с.
72. **Химмельблау, Д.** Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау. – М.: Мир, 1975. – 137 с.
73. **Цирульский А. В.** Об интерпретации гравитационных и магнитных аномалий / А. В. Цирульский, В. И. Майер, Ф. И. Никонова, И. Л. Пруткин, Н. В. Федорова // Тихоокеанская геология. АН СССР. – 1984. – № 1. – С. 94–98.
74. **Шаров, Н. В.** Интегральные глубинные модели Печенгского и Онежского рудных районов / Н. В. Шаров, М. В. Чичеров, К. В. Лобанов // Доклады Академии Наук. – 2018. – Т. 482, № 6. – С. 689–692. – DOI 10.31857/S086956520002957-5.

75. **Achauer, U.** A study of the Kenya rift using delay-time tomography analysis and gravity modelling / U. Achauer // *Tectonophysics*. – 1992. – Vol. 209, № 1-4. – pp. 197–207. – DOI 10.1016/0040-1951(92)90023-Y.
76. **Akimova, E. N.** An efficient numerical technique for solving the inverse gravity problem of finding a lateral density / E. N. Akimova, P. S. Martyshko, V. E. Misilov, R. A. Kosivets // *Applied Mathematics and Information Sciences*. – 2016. – Vol. 10, № 5. – pp. 1681–1688.
77. **Akimova, E. N.** Optimized algorithms for solving structural inverse gravimetry and magnetometry problems on GPUs / E. N. Akimova, V. E. Misilov, A. I. Tretyakov // *Communications in Computer and Information Science*. – 2017. – Vol. 753. – pp. 144–155. – DOI 10.1007/978-3-319-67035-5_11.
78. **Akimova, E. N.** Modified componentwise gradient method for solving structural magnetic inverse problem / E. N. Akimova, V. E. Misilov, A. I. Tretyakov // *Communications in Computer and Information Science*. – 2018. – Vol. 910. – pp. 162–173. – DOI 10.1007/978-3-319-99673-8_12.
79. **Akimova, E. N.** Using multicore and graphics processors to solve the structural inverse gravimetry problem in a two-layer medium by means of α -processes / E. N. Akimova, V. E. Misilov, A. I. Tretyakov // *Communications in Computer and Information Science*. – 2019. – Vol. 1063. – pp. 285–296. – DOI 10.1007/978-3-030-28163-2_20.
80. **Akimova, E. N.** Optimization of gradient algorithm for solving the nonlinear inverse potential problem / E. N. Akimova, V. E. Misilov // *Journal of Computational Methods in Sciences and Engineering*. – 2019. – Vol. 19, № 2. – pp. 417–424. – DOI 10.3233/JCM-190025.
81. **Arora, N.** Efficient interpolation of high-fidelity geopotentials / N. Arora, R. P. Russell // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. – 2016. – Vol. 39, № 1. – pp. 128–143. – DOI 10.2514/1.G001291.
82. **Artemieva, I. M.** Density structure of the cratonic mantle in southern Africa: 1. Implications for dynamic topography / I. M. Artemieva, L. P. Vinnik // *Gondwana Research*. – 2016. – Vol. 39. – pp. 204–216. – DOI 10.1016/j.gr.2016.03.002.

83. **Artemieva, I. M.** Density structure of the cratonic mantle in Southern Africa: 2. Correlations with kimberlite distribution, seismic velocities, and Moho sharpness / I. M. Artemieva, L. P. Vinnik // *Gondwana Research*. – 2016. – Vol. 36. – pp. 14–27. – DOI 10.1016/j.gr.2016.05.002.
84. **Cuma, M.** Large-scale 3D inversion of potential field data / M. Cuma, G. A. Wilson, M. S. Zhdanov // *Geophysical Prospecting*. – 2012. – Vol. 60, № 6. – pp. 1186–1199. – DOI 10.1111/j.1365-2478.2011.01052.x.
85. **Cuma, M.** Massively parallel regularized 3D inversion of potential fields on CPUs and GPUs / M. Cuma, M. S. Zhdanov // *Computers and Geosciences*. – 2014. – Vol. 62. – pp. 80–87. – DOI 10.1016/j.cageo.2013.10.004.
86. **Dai, Y.-H.** A nonlinear conjugate gradient method with a strong global convergence property / Y.-H. Dai, Y. Yuan // *SIAM J. Optim.* – 1999. – Vol. 10, № 1. – pp. 177–182.
87. **Fletcher, R.** Function minimization by conjugate gradients / R. Fletcher, C. M. Reeves // *Comput. J.* – 1964. – № 7. – pp. 149–154.
88. **Haase, C.** A 3D regional crustal model of the NE Atlantic based on seismic and gravity data / C. Haase, J. Ebbing, T. Funck // *Geological Society Special Publication*. – 2017. – Vol. 447, № 1. – pp. 233–247. – DOI 10.1144/SP447.8.
89. **Hestenes M. R.** Methods of conjugate gradients for solving linear systems / M. R. Hestenes, E. Stiefel // *J. Research Nat. Bur. Standards*. – 1952. – Vol. 49. – pp. 409–436.
90. **Kaban, M. K.** A gravity model of the North Eurasia crust and upper mantle: 1. Mantle and isostatic residual gravity anomalies / M. K. Kaban // *Russian Journal of Earth Sciences*. – 2001. – Vol. 3, № 2. – pp. 125–144. – DOI 10.2205/2001ES000062.
91. **Kaban, M. K.** A gravity model of the north Eurasia crust and upper mantle: 2. The Alpine-Mediterranean foldbelt and adjacent structures of the southern former USSR / M. K. Kaban // *Russian Journal of Earth Sciences*. – 2002. – Vol. 4, № 1. – pp. 19–33. – DOI 10.2205/2002ES000082.
92. **Kaban, M. K.** A gravity model of the North Eurasia crust and upper mantle. 3. Stress state of the lithosphere induced by density inhomogeneities / M. K. Kaban // *Russian*

- Journal of Earth Sciences. – 2004. – Vol. 6, № 2. – pp. 95–103. – DOI 10.2205/2004ES000154.
93. **Kaban, M. K.** Density structure and isostasy of the lithosphere in Egypt and their relation to seismicity / M. K. Kaban, S. El Khrepy, N. Al-Arifi // *Solid Earth*. – 2018. – Vol. 9, № 4. – pp. 833–846. – DOI 10.5194/se-9-833-2018.
 94. **Kadima, E.** Structure and geological history of the Congo Basin: An integrated interpretation of gravity, magnetic and reflection seismic data / E. Kadima, D. Delvaux, S. N. Sebagenzi, L. Tack, S. M. Kabeya // *Basin Research*. – 2011. – Vol. 23, № 5. – pp. 499–527. – DOI 10.1111/j.1365-2117.2011.00500.x.
 95. **Makris, J.** A 3-D density-velocity model between the Cretan sea and Libya / J. Makris, T. Yegorova // *Tectonophysics*. – 2006. – Vol. 417, № 3-4. – pp. 201–220. – DOI 10.1016/j.tecto.2005.11.003.
 96. **Makris, J.** A 3-D density model of Greece constrained by gravity and seismic data / J. Makris, J. Papoulia, T. Yegorova // *Geophysical Journal International*. – 2013. – Vol. 194, № 1. – pp. 1–17. – DOI 10.1093/gji/ggt059.
 97. **Martyshko, P. S.** Gravity Data Inversion with Method of Local Corrections for Finite Elements Models / P. S. Martyshko, I. V. Ladovskii, D. D. Byzov, A. G. Tsidaev // *Geosciences*. – 2018. – Vol. 8, № 10. – 373. – DOI 10.3390/geosciences8100373.
 98. **Megnin, C.** The three-dimensional shear velocity structure of the mantle from the inversion of body, surface and higher-mode waveforms / C. Megnin, B. Romanowicz // *Geophysical Journal International*. – 2000. – Vol. 143, № 3. – pp. 709–728. – DOI 10.1046/j.1365-246X.2000.00298.x.
 99. **Polak, E.** Note sur la convergence de directions conjuguée / E. Polak, G. Ribière. // *Rev. Francaise Informat Recherche Operationelle*. – 1969. – 3e Ann´ee 16. – pp. 35–43.
 100. **Romanyuk, T.** Two lithospheric profiles across southern California derived from gravity and seismic data / T. Romanyuk, W. D. Mooney, S. Detweiler // *Journal of Geodynamics*. – 2007. – Vol. 43, № 2. – pp. 274–307. – DOI 10.1016/j.jog.2006.09.011.
 101. **Sobh, M.** Inverse and 3D forward gravity modelling for the estimation of the crustal thickness of Egypt / M. Sobh, J. Ebbing, A. H. Mansi, H.-J. Götze // *Tectonophysics*. – 2019. – Vol. 752. – pp. 52–67. – DOI 10.1016/j.tecto.2018.12.002.

102. **Sobh, M.** Regional Gravity Field Model of Egypt Based on Satellite and Terrestrial Data / M. Sobh, A. H. Mansi, S. Campbell, J. Ebbing // *Pure and Applied Geophysics*. – 2019. – Vol. 176, № 2. – pp. 767–786. – DOI 10.1007/s00024-018-1982-y.
103. **Spooner, C.** Density distribution across the Alpine lithosphere constrained by 3-D gravity modelling and relation to seismicity and deformation / C. Spooner, M. Scheck-Wenderoth, H.-J. Götze, J. Ebbing, G. Hetényi // *Solid Earth*. – 2019. – Vol. 10, № 6. – pp. 2073–2088. – DOI 10.5194/se-10-2073-2019.
104. **Tiberi, C.** Deep structure of the Baikal rift zone revealed by joint inversion of gravity and seismology / C. Tiberi, M. Diament, J. Déverchère, C. Petit-Mariani, V. Mikhailov, S. Tikhotsky, U. Achauer // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. – 2003. – Vol. 108, № 3. – pp. ETG 1-1–1-15. – DOI 10.1029/2002jb001880.
105. **Tikhotsky, S.** Inversion of controlled-source seismic tomography and gravity data with the self-adaptive wavelet parametrization of velocities and interfaces / S. Tikhotsky, U. Achauer // *Geophysical Journal International*. – 2008. – Vol. 172, № 2. – pp. 619–630. – DOI 10.1111/j.1365-246X.2007.03648.x.
106. **Tondi, R.** Unveiling seismic and density structure beneath the Vrancea seismogenic zone, Romania / R. Tondi, U. Achauer, M. Landes, R. Daví, L. Besutiu // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. – 2009. – Vol. 114, № 11. – Article number B11307. – DOI 10.1029/2008JB005992.
107. **Toushmalani, R.** Fast 3D inversion of gravity data using Lanczos bidiagonalization method / R. Toushmalani, H. Saibi // *Arabian Journal of Geosciences*. – 2015. – Vol. 8, № 7. – pp. 4969–4981. – DOI 10.1007/s12517-014-1534-4.
108. **Toushmalani, R.** 3D gravity inversion using Tikhonov regularization / R. Toushmalani, H. Saibi // *Acta Geophysica*. – 2015. – Vol. 63, № 4. – pp. 1044–1065. – DOI 10.1515/acgeo-2015-0029.
109. **Vatankhah, S.** IGUG: A MATLAB package for 3D inversion of gravity data using graph theory / S. Vatankhah, V. E. Ardestani, S. S. Niri, R. A. Renaut, H. Kabirzadeh // *Computers and Geosciences*. – 2019. – Vol. 128. – pp. 19–29. – DOI 10.1016/j.cageo.2019.03.008.

110. **Vinnik, L. P.** Crust and mantle of the Baikal rift zone from P- and S-wave receiver functions / L. P. Vinnik, S. I. Oreshin, L. R. Tsydypova, V. V. Mordvinova, M. M. Kobelev, M. A. Khritova, Ts. A. Tubanov // *Geodynamics and Tectonophysics*. – 2017. – Vol. 4, № 4. – pp. 695–709. – DOI 10.5800/GT-2017-8-4-0313.
111. **Yegorova, T. P.** Large-scale 3-D gravity analysis of the inhomogeneities in the european-mediterranean upper mantle / T. P. Yegorova, V. I. Starostenko, V. G. Kozlenko // *Pure and Applied Geophysics*. – 1998. – Vol. 151, № 2-4. – pp. 549–561. – DOI 10.1007/s000240050129.
112. **Yegorova, T. P.** 3-D gravity analysis of the Dniepr-Donets basin and Donbas foldbelt, Ukraine / T. P. Yegorova, V. G. Kozlenko, V. I. Starostenko, O. V. Legostaeva, R. A. Stephenson // *Tectonophysics*. – 1999. – Vol. 313, № 1-2. – pp. 41–58. – DOI 10.1016/S0040-1951(99)00189-4.
113. **Yegorova, T. P.** Large-scale three-dimensional gravity analysis of the lithosphere below the transition zone from western Europe to the east European platform / T. P. Yegorova, V. I. Starostenko // *Tectonophysics*. – 1999. – Vol. 314, № 1-3. – pp. 83–100. – DOI 10.1016/S0040-1951(99)00238-3.
114. **Yegorova, T. P.** A three-dimensional density model of the European lithosphere: I / T. P. Yegorova // *Izvestiya. Physics of the solid earth*. – 2001. – Vol. 37, № 5. – pp. 353–365.
115. **Yegorova, T. P.** A three-dimensional density model of the European lithosphere: II / T. P. Yegorova // *Izvestiya. Physics of the solid earth*. – 2001. – Vol. 37, № 5. – pp. 366–377.
116. **Yegorova, T. P.** Lithosphere structure of Europe and northern Atlantic from regional three-dimensional gravity modelling / T. P. Yegorova, V. I. Starostenko // *Geophysical Journal International*. – 2002. – Vol. 151, № 1. – pp. 11–31. – DOI 10.1046/j.1365-246X.2002.01728.x.
117. **Yegorova, T. P.** Lithosphere structure of European sedimentary basins from regional three-dimensional gravity modelling / T. P. Yegorova, V. I. Starostenko // *Tectonophysics*. – 2002. – Vol. 346, № 1-2. – pp. 5–21. – DOI 10.1016/S0040-1951(01)00225-6.

118. **Yegorova, T. P.** Lithosphere structure of the Ukrainian shield and Pripjat trough in the region of Eurobridge-97 (Ukraine and Belarus) from gravity modelling / T. P. Yegorova, V. I. Starostenko, V. G. Kozlenko, J. Yliniemi // *Tectonophysics*. – 2004. – Vol. 381, № 1-4. – pp. 29–59. – DOI 10.1016/j.tecto.2002.06.003.
119. **Yegorova, T. P.** Structure of the lithosphere below the southern margin of the east European craton (Ukraine and Russia) from gravity and seismic data / T. P. Yegorova, E. P. Baranova, V. I. Starostenko, R. A. Stephenson, S. L. Kostyuchenko, K. E. Popolitov // *Tectonophysics*. – 2004. – Vol. 381, № 1-4. – pp. 81–100. – DOI 10.1016/j.tecto.2002.08.003.
120. **Yegorova, T.** Lithosphere structure of the Black sea from 3-D gravity analysis and seismic tomography / T. Yegorova, V. Gobarenko, T. Yanovskaya // *Geophysical Journal International*. – 2013. – Vol. 193, № 1. – pp. 287–303. – DOI 10.1093/gji/ggs098.
121. **Yegorova, T.** Structure of the upper mantle of northern Eurasia from 2D density modeling on seismic profiles with peaceful nuclear explosions / T. Yegorova, G. Pavlenkova // *Tectonophysics*. – 2014. – Vol. 627, № 1. – pp. 57–71. – DOI 10.1016/j.tecto.2014.04.012.